Denis Brazke
denis.brazke@uni-heidelberg.de

20. Januar 2020

Funktionalanalysis 2 – Übungsblatt 1

Wintersemester 2019/20, Universität Heidelberg

Aufgabe 1.1

Sei H ein Hilbertraum und $(x_n)_n \subset H$ eine schwach-konvergente Folge mit Grenzwert $x \in H$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

b) Falls $\|x_n\| \to \|x\|$, dann gilt $x_n \to x$ in H.

c) Sei $(y_n)_n \subset H$ eine in H konvergente Folge mit Grenzwert $y \in H$. Dann gilt $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Beweis:

a) Als schwach-konvergente Folge in einem Hilbertraum ist $(x_n)_n$ auch eine beschränkte Folge, sodass wir eine Teilfolge $(x_{n_j})_j$ finden mit

$$\lim_{j\to\infty} \|x_{n_j}\| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|. \tag{1.1}$$

Wir erhalten mit der Ungleichung nach Cauchy-Schwarz

$$\|x\|^2 = (x, x) = \lim_{n\to\infty} (x, x_n) = \lim_{j\to\infty} (x, x_{n_j}) \leq \|x\| \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j}\| = \|x\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|. \tag{1.2}$$

b) Wir betrachten

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|^2 = (x - x_n, x - x_n) &= (x, x) - (x, x_n) - (x_n, x) + (x_n, x_n) & (1.3)\\ &= \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - (x_n, x) - (x, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0. & (1.4) \end{aligned}$$

Dabei konvergiert der zweite Summand in (1.4) nach Voraussetzung und die restlichen beiden nach Definition der schwachen Konvergenz.

c) Wir betrachten

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)|. \tag{1.5}$$

Per Definition der schwachen Konvergenz konvergiert der zweite Summand auf der rechten Seite in (1.5) gegen 0. Der erste Summand konvergiert ebenfalls gegen 0, denn nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, nach Konvergenzvoraussetzung und wegen der Beschränktheit von schwach-konvergenten Folgen gilt

$$|(x_n, y_n - y)| \leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| \lesssim \|y_n - y\| \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{1.6}$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Denis Brazke
denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 1.2
Sei H ein separabler Hilbertraum und $\{w_n\}_n \subset H$ ein Orthonormalsystem paarweiser verschiedener Elemente in H. Sei $A\colon H \longrightarrow H$ ein kompakter Operator. Zeigen Sie, dass $Aw_n \to 0$ in H.

Beweis: Wegen der Separabilität von H können wir $\{w_n\}_n$ zu einer Hilbertraumbasis $\{v_\ell\}_\ell$ ergänzen (Gram-Schmidt-Verfahren). Da H reflexiv ist, stimmen schwache und schwach* Konvergenz überein. Sei nun $x \in H$, dann lässt sich x darstellen als (unendliche) Linearkombination von $\{v_\ell\}_\ell$, nämlich

$$x = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} c_\ell \, v_\ell \tag{2.1}$$

für Konstanten $c_\ell \in \mathbb{K}$. Für die Konvergenz der Reihe muss die Folge $(c_\ell)_\ell$ eine Nullfolge sein. Daraus erhalten wir

$$\langle v_k, x\rangle = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} c_\ell \langle v_k, v_\ell\rangle = c_k \xrightarrow{k\to\infty} 0. \tag{2.2}$$

Da $x \in H$ beliebig war konvergiert die Folge $\{v_\ell\}_\ell$ schwach gegen 0 und damit auch $\{w_n\}_n$ als Teilfolge. Da kompakte Operatoren auf reflexiven Banachräumen stark-stetig sind[1] folgt die Behauptung. ■

[1] Das bedeutet, dass das Bild einer schwach konvergenten Folge unter einem kompakten Operator stark konvergiert. Siehe [Alt, Lemma 10.2].

Aufgabe 1.3
Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass

$$\lim_{m\to\infty} \|A^m\|_{X'}^{\frac{1}{m}} = \inf_{m\in\mathbb{N}} \|A^m\|_{X'}^{\frac{1}{m}}, \tag{3.1}$$

insbesondere, dass der Grenwert existiert. Definiere dazu die Folge

$$a_m := \log \|A^m\|_{X'} \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

a) Zeigen Sie, dass $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

b) Sei $n = mq + r$, wobei $n, m, q, r \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r \leq m - 1$. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}. \tag{3.3}$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \tag{3.4}$$

und folgern Sie hieraus (3.2).

<u>**Beweis:**</u> Wir notieren $\| \cdot \| := \| \cdot \|_{X'}$.

a) Da die Operatornorm submultiplikativ und der Logarithmus streng monoton steigend ist erhalten wir für $n, m \in \mathbb{N}$

$$a_{n+m} = \log \|A^{m+n}\| \leq \log(\|A^n\| \, \|A^m\|) = \log(\|A^n\|) + \log(\|A^m\|) = a_n + a_m. \tag{3.5}$$

b) Für $n = qm + r$ erhalten wir

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{qm+r}}{n} \overset{\text{a)}}{\leq} \frac{a_{qm}}{n} + \frac{a_r}{n}. \tag{3.6}$$

Wieder aus der Subadditivität der Operatornorm und der Monotonie des Logarithmus folgt

$$a_{qm} = \log \|A^{qm}\| \leq q \log \|A^m\| = q\, a_m, \qquad a_r \leq r\, a_1, \tag{3.7}$$

sodass

$$(3.6) \leq \frac{a_m}{m} \frac{q}{q + \frac{r}{m}} + a_1 \frac{r}{n}. \tag{3.8}$$

Für feste m ist r beschränkt sodass für $q \to \infty$ der zweite Summand $a_1 \frac{r}{n} \to 0$. Der Faktor $\frac{q}{q+\frac{r}{m}}$ konvergiert für $q \to \infty$ gegen 1. Insgesamt folgt also die Behauptung.

c) ■

Denis Brazke
denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 1.4
Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie, dass

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \lim_{m \to \infty} \|A^m\|_{X'}^{\frac{1}{m}}. \tag{4.1}$$

Hinweis: Berechnen Sie den Konvergenzradius der Laurent-Reihe der Resolvente mit der Formel von Cauchy-Hadamard für banachraumwertige Funktionen und argumentieren Sie, dass der Konvergenzradius gerade der Spektralradius ist. Nutzen Sie die Analytizität der Resolvente.

Beweis: Wir schreiben $r(A)$ für die linke Seite von (4.1) und $\| \cdot \| := \| \cdot \|_{X'}$.

Nach Satz 1.10 ist $\sigma(A)$ kompakt, sodass $r(A)$ endlich ist. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und R_λ die Resolvente von A zu λ. Unter Benutzung der Neumann-Reihe erhalten wir für $|\lambda| > \|A\|$

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\Big[\mathsf{id} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{A}{\lambda}\Big)^k\Big]. \tag{4.2}$$

Dies stellt eine Laurent-Reihe dar und wir wollen nun den inneren Konvergenzradius bestimmen und zeigen, dass dieser sowohl durch $r(A)$, als auch durch die rechte Seite von (4.1) gegeben ist.

Falls $|\lambda| > r(A)$, dann ist R_λ analytisch nach Satz 1.10 denn in diesem Fall ist $\lambda \in \rho(A)$, sodass die Reihe (4.2) konvergiert. Der innere Konvergenzradius ist also größer-gleich $r(A)$.

Auf der anderen Seite existiert R_λ falls (4.2) konvergiert. Falls nun also $\lambda \in \sigma(A)$, dann konvergiert (4.2) nicht da die Resolvente nicht existiert. Wir finden also eine Folge $(\lambda_j)_j \subset \sigma(A)$ mit $|\lambda_j| \nearrow r(A)$ für $j \to \infty$ und R_{λ_j} existiert nicht, sodass die Reihe in (4.2) nicht existiert. Der innere Konvergenzradius muss $r(A)$ sein.

Für die Identität (4.1) nutzen wir die Banachraumwertige Version der Cauchy-Hadamard-Formel,[2] die besagt, dass der innere Konvergenzradius r der Laurent-Reihe in (4.2) gegeben ist durch

$$r = \limsup_{k \to \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}, \tag{4.3}$$

wobei die letzte Identität nach Aufgabe 1.3 folgt. Insgesamt folgt also die Behauptung $r = r(A)$. ∎

[2]Dies ist eine Anwendung des Wurzelkriteriums.