Alternierende Multilinearformen

Anwendung: Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten
Fermionische Mehrteilchensysteme

V ein K-VR der Dimension $\dim(V) = n$.
Es gilt die Identifikation

$$\underbrace{L(V,\dots,V;K)}_{k\text{-mal}} = (V \otimes \cdots \otimes V)^*$$
$$= V^* \otimes \cdots \otimes V^*$$
$$=: (V^*)^{\otimes k}.$$

Das Verhalten unter Permutationen einzelner Elemente lässt sich durch einen Gruppenhomomorphismus

$$S_k \longrightarrow (V^*)^{\otimes k}$$
$$\sigma \longmapsto c_\sigma(\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_k) := \lambda_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \lambda_{\sigma(k)}$$

charakterisieren, genannt eine "Darstellung von S_k auf $(V^*)^{\otimes k}$".
Für $T \in (V^*)^{\otimes k}$ ist das Abbildungsverhalten dann

$$(c_\sigma(T))(v_1,\dots,v_k) := T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}).$$

Folgende Fälle sind interessant

"Bosonische Statistik"

$$\mathrm{Sym}^k V^* := \{ T \in L(V, \dots, V; k) \mid T(v_1, \dots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \ \forall \sigma \in S_k \}$$

$$\Lambda^k V^* := \{ T \in L(V, \dots, V; k) \mid T = \mathrm{sgn}(\sigma) \, c_\sigma(T) \ \forall \sigma \in S_k \}.$$

"Fermionische Statistik".

mit $\mathrm{sgn}: S_k \to \{\pm 1\}$ die "Vorzeichenfunktion".

Elemente $\omega \in \Lambda^k V^*$ heißen k-Formen auf V.

Jede Form lässt sich aus Formen geringeren Grades zusammensetzen: <u>Dach- ("Wedge"-) Produkt</u>

Ist $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in V^*$ jeweils eine 1-Form, dann ist

$$\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k := \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \, c_\sigma(\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_k) \in \Lambda^k V^*$$

eine k-Form.

Als Abb.:

$$(\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k)(v_1, \dots, v_k) := \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \, \lambda_1(v_{\sigma(1)}) \cdots \lambda_k(v_{\sigma(k)})$$

Leibnizformel!

Es gilt dann: Ist $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ eine Basis von V^*, dann ist

$$\{\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\} \quad (*)$$

eine Basis von $\Lambda^k V^*$. Wegen der Antikommutativität (bzw. graduierte Kommutativität, siehe unten) des Dachproduktes, d.h.

$$\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j = \begin{cases} (-1) \cdot \varepsilon^j \wedge \varepsilon^i & ; \ i \neq j \\ 0 & ; \ i = j \end{cases},$$

Überlegt euch das

folgt direkt

$$\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$$

$\dim V = \dim V^* = n$

$$\dim \Lambda^n V^* = 1 \ , \quad \Lambda^k V^* = \{0\} \text{ für } k > n.$$

Auf den Formen $(*)$ definiert, setzt sich das Dachprodukt linear fort:

$$\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \longrightarrow \Lambda^{k+l} V^*$$
$$(\omega, \eta) \longmapsto \omega \wedge \eta.$$

Auf "einfachen" Formen gilt dann einfach

$$(\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k) \wedge (\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_l) := \lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k \wedge \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_l$$

$$\underset{\Lambda^k V^*}{\cap} \qquad \underset{\Lambda^l V^*}{\cap} \qquad \underset{\Lambda^{k+l} V^*.}{\cap}$$

Als Abbildung:

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \overset{\text{Vorfaktor}}{\#} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Zentrale Rechenregeln für $\omega_i \in \Lambda^{k_i} V^*$:

"Assoziativ"

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{k_1 k_2}\, \omega_2 \wedge \omega_1$$

"graduiert Kommutativ / Superkommutativ"

Zusammengefasst bilden alle Formen die graduierte Algebra

$$\Lambda V^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V^* \quad \text{der Dimension } 2^n.$$

Geometrischer Nutzen:

Für $\dim V = n$ ist $\dim \Lambda^n V^* = 1$.

$\Longrightarrow$ $\omega \in \Lambda^n V^*$ sind von der Form

$$\omega = \xi \cdot \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n.$$

Und $\omega : \underbrace{(b_1, \dots, b_n)}_{\text{z.B. eine Basis von } V} \longmapsto \underbrace{\omega(b_1, \dots, b_n)}_{\xi \cdot \text{ das Volumen des von } (b_1,\dots,b_n) \text{ aufgespannten Parallelotops.}} \in K\ (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$

Ist $A : V \to V$ eine lineare Abb., gilt (ÜA)

$$\omega(A b_1, \dots, A b_n) = \det A \cdot \omega(b_1, \dots, b_n).$$

Die Volumenzuweisung transformiert also wie von der Integrationstheorie erwartet. Eine globale Variante einer solchen Form auf einer Mannigfaltigkeit dient daher als Integrationsmaß.

Ist $k < n$ sind die relevanten Formen nicht mehr eindeutig bestimmt (bis auf Skalare) und liefern unterschiedliche Volumenzuweisungen.

<u>Bsp.</u> $V = \mathbb{R}^3$, $\omega = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3$.

$$\omega(e_1, e_2) = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 (e_1, e_2) + 2\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 (e_1, e_2)$$

$$= (\varepsilon^1 \otimes \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \otimes \varepsilon^1)(e_1, e_2)$$

$$+ (2\varepsilon^2 \otimes \varepsilon^3 - \varepsilon^3 \otimes 2\varepsilon^2)(e_1, e_2)$$

$$= \overbrace{\underset{=1}{\varepsilon^1(e_1)} \cdot \underset{=1}{\varepsilon^2(e_2)}}^{=1} - \overbrace{\underset{=0}{\varepsilon^2(e_1)} \cdot \underset{=0}{\varepsilon^1(e_2)}}^{=0}$$

$$+ \underbrace{2\underset{=0}{\varepsilon^2(e_1)}\, \underset{=0}{\varepsilon^3(e_2)}}_{=0} - \underbrace{\underset{=0}{\varepsilon^3(e_1)} \cdot \underset{=2}{2\varepsilon^2(e_2)}}_{=0}$$

$$= 1$$

Genauso:

$\omega(e_2, e_3) = 2$ (ÜA)

$\omega(e_1 + e_2 + e_3, 2\varepsilon_3) = 4$.