Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 11

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 18.01.2019, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 11.1 *Halbordnung orthogonaler Projektionen*
Für einen Hilbertraum H und einen abgeschlossenen Unterraum $U \subset H$ betrachten wir die zugehörige orthogonale Projektion P_U. Beweisen Sie zunächst folgende Eigenschaften von P_U: (i) $P_U^2 = P_U$. (ii) $\langle P_U x, y\rangle = \langle x, P_U y\rangle$ für alle $x, y \in H$. Es sei $V \subset H$ ein weiterer Unterraum mit orthogonaler Projektion P_V. Folgern Sie mithilfe obiger Eigenschaften: Es gilt $V \subset U$ genau dann, wenn $\langle (P_U - P_V)x, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in H$ gilt.

Aufgabe 11.2 *Kegel einfacher Tensoren*
Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ sei ausgestattet mit der Standardbasis $\{e_1, e_2\}$. Geben Sie eine Basis von $V \otimes V$ an und stellen Sie einen allgemeinen einfachen Tensor $T \in V \otimes V$ in dieser Basis dar. Geben Sie dann einen linearen Isomorphismus $A : V \otimes V \to \mathbb{R}^4$ an und charakterisieren Sie das Bild aller einfachen Tensoren unter A.

Aufgabe 11.3 *Verschränkung*
Es seien V, W endlichdimensionale $K(= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$-Vektorräume. Rufen Sie sich aus der Linearen Algebra ins Gedächtnis: Die *Spur* einer darstellenden Matrix von $A \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ ist unabhängig von der Wahl der Basis und gegeben durch $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{\dim(V)} A_{i\,i}$. Der *Rang* von $A \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist $\mathrm{rk}(A) := \dim(A(V))$. Die auf einfachen Tensoren in $V^* \otimes W$ definierte Abbildung $\lambda \otimes w \mapsto (v \mapsto \lambda(v) \cdot w)$ setzt sich zu einem linearen Isomorphismus $V^* \otimes W \simeq \mathrm{Hom}_K(V, W)$ fort. Zeigen Sie:

(a) Für $A \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ gilt: $\mathrm{rk}(A) = 1 \Leftrightarrow A$ ist einfach in $V^* \otimes W$ und $A \neq 0$.

(b) Die auf einfachen Tensoren in $V^* \otimes V$ definierte Abbildung $S(\lambda \otimes v) := \lambda(v)$ setzt sich zu einer linearen Abbildung $S \in \mathrm{Hom}_K(V^* \otimes V, K)$ fort und es gilt $S(A) = \mathrm{tr}(A)$ für alle $A \in V^* \otimes V$.

(c) Die auf einfachen Tensoren in $\mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V \otimes W) \simeq \mathrm{Hom}_K(V, V) \otimes \mathrm{Hom}(W, W)$ definierte Abbildung $A \otimes B \mapsto \mathrm{tr}(A) \cdot B$ setzt sich zu einer linearen Abbildung, der *partiellen Spur*, $\mathrm{tr}_V : \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V \otimes W) \to \mathrm{Hom}_K(W, W)$ fort.

(d) Geben Sie im Fall $V \simeq \mathbb{R}^2$, $W \simeq \mathbb{R}^2$ ein Beispiel für ein $R \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, V \otimes W)$ mit $\mathrm{rk}(R) = 1$ und $\mathrm{rk}(\mathrm{tr}_V(R)) = 2$. *Hinweis*: Betrachten Sie einen nicht-einfachen Tensor $b \in V \otimes W$, das zugehörige duale Element β und $\beta \otimes b$.

Aufgabe 11.4 *Tensorprodukt von Hilberträumen*
Es sei $H = \ell^2(\mathbb{R})$ ausgestattet mit der üblichen Hilbertraumbasis $\{e_k := (\delta_{k,l})_{l \in \mathbb{N}}\}$ und $(a_k)_k := (k^{-1/2} e_k)_k$ eine Folge in H. Wir definieren

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\, e_k \otimes e_k \in H \otimes H.$$

Zeigen Sie, dass $(b_n)_n$ zwar eine Cauchyfolge in $H \otimes H$ ist, wobei $H \otimes H$ mit dem kanonischen Skalarprodukt auf dem Tensorprodukt versehen ist, aber dass $(b_n)_n$ nicht konvergiert. *Hinweis*: Berechnen Sie für den hypothetischen Grenzwert b das Produkt $\langle b, e_\mu \otimes e_\nu\rangle$ auf zwei verschiedene Weisen und führen Sie dies auf einen Widerspruch.