Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt zur Klausurvorbereitung

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Probeklausur email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Diese Aufgaben werden weder abgegeben, noch korrigiert. Besprechung ist am 31.01.2019 um 16:15 Uhr in INF 227 (KIP) HS1.

Vergessen Sie nicht, sich bis zum 04.02.2019 über das Müsli zur Klausur anzumelden.

Versuchen Sie die Aufgaben als Vorbereitung auf die Klausur ohne Hilfsmittel und innerhalb von etwa 100 Minuten zu lösen. Insgesamt sind 50 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 *3+3+2 Punkte*
Gegeben sei ein Vektorfeld $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$K(x,y,z) := \begin{pmatrix} x + 2y + \alpha z \\ \beta x - 3y - z \\ 4x + \gamma y + 2z \end{pmatrix}.$$

(a) Legen Sie die Parameter α, β, γ so fest, dass K rotationsfrei wird.

(b) Das so erhaltene Vektorfeld besitzt ein Potential. Bestimmen Sie dieses explizit.

(c) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_C K(s)\,\mathrm{d}s$ von K entlang der Kurve $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $C(t) := (\cos(t), \sin(t), \cos(t))$.

Aufgabe 2 *4+4 Punkte*
Sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum und $p, q, r \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Zeigen Sie:

(a) Für $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^q(X, \mu)$ gilt $fg \in L^r(X, \mu)$ und

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(b) Für $f \in L^2(X, \mu)$, $g \in L^3(X, \mu)$ und $h \in L^6(X, \mu)$ gilt $f \cdot g \cdot h \in L^1(X, \mu)$.

Aufgabe 3 *8 Punkte*
Für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$M := \big\{(x,y) \,|\, x^3 + xy + y^3 = c\big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass M für $c \neq 1/27$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit definiert.

Aufgabe 4 *3+5 Punkte*

(a) Formulieren Sie den Satz von der monotonen Konvergenz für eine Folge messbarer Funktionen $f_k : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$.

(b) Es sei $a_k := \int_{[0,1]} \frac{x}{(x+1)^k}\,\mathrm{d}\lambda(x)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

Hinweis: $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(x+1)^k}$ ist eine geometrische Reihe mit Grenzwert $\frac{x+1}{x}$ für $x \neq 0$.

Aufgabe 5 *3+5 Punkte*

(a) Es sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1;\ y \geq 0\}$. In folgender Formel bezeichnen (r,φ) Polarkoordinaten und $f \in L^1(B)$ eine integrierbare Funktion. Was ist an den offen gelassenen Stellen einzusetzen?

$$\int_B f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_?^? \int_?^? (?)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_B (x^2 - xy + y^2)\,\mathrm{d}\lambda_2.$$

Aufgabe 6 *4+6 Punkte*

(a) Formulieren Sie den Repräsentationssatz von Riesz für einen Hilbertraum H.

(b) Untersuchen Sie den linearen Operator $A : \mathbb{R}^n \to \ell^2(\mathbb{R})$, definiert durch

$$A(x_1,\dots,x_n) := \left(\frac{x_1}{1},\dots,\frac{x_n}{1},\dots,\frac{x_1}{k},\dots,\frac{x_n}{k},\dots\right), \qquad (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

auf seine Beschränktheit. Hierbei ist $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Norm $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ und $\ell^2(\mathbb{R})$ mit der ℓ^2-Norm $\|(a_k)_k\|_{\ell^2} = \sum_{k=1}^\infty |a_k|^2$ ausgestattet.