Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 12

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 25.01.2019, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 12.1 *Transformation alternierender Formen*
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n und $\omega \in \bigwedge^n V^*$ eine alternierende n-Form. Beweisen Sie: Für $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ und beliebige $v_1, ..., v_n \in V$ gilt

$$\omega(A(v_1), ..., A(v_n)) = \det(A) \cdot \omega(v_1, ..., v_n).$$

Aufgabe 12.2 *Spinoren im Sigma-Modell*
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$. Für $v \in V$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir folgende Abbildung auf einfachen Tensoren:

$$i_v : \bigotimes^k V^* \longrightarrow \bigotimes^{k-1} V^*, \qquad \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_k \longmapsto \lambda_1(v) \cdot \lambda_2 \otimes \cdots \otimes \lambda_k.$$

Auf alternierende Multilinearformen eingeschränkt und linear fortgesetzt induziert diese eine Abbildung auf der äußeren Algebra $i_v : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-1} V^*$.

(a) Beweisen Sie die Gültigkeit der Formel

$$i_v(\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_k) = \lambda_1(v) \cdot \lambda_2 \wedge \cdots \wedge \lambda_k - \sum\nolimits_{i=2}^{k} (-1)^i \lambda_i(v) \cdot \lambda_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\lambda}_i \wedge \cdots \wedge \lambda_k,$$

wobei $\widehat{\lambda}_i$ symbolisieren soll, dass der i-te Faktor ausgelassen wird (z.B. ist dann $\lambda_1 \wedge \widehat{\lambda}_2 \wedge \lambda_3 := \lambda_1 \wedge \lambda_3$).

(b) Sei nun $\varphi^j : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k+1} V^*$ gegeben durch $\varphi^j(\omega) := e^{j*} \wedge \omega$, wobei $\{e_i\}_i$ die kanonische Basis von V und $\{e^{j*}\}_j$ die zugehörige Dualbasis bezeichnet. Zeigen Sie: Für $k = n$ gilt $i_{e_i} \circ \varphi^j = 0$ und $\varphi^j \circ i_{e_i} = \delta_i^j$.

Aufgabe 12.3 *Stereographische Projektion*
Wir wollen die Einheitssphäre $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ als Mannigfaltigkeit der Dimension 1 verstehen, indem wir explizit Karten konstruieren. Betrachten Sie dazu zunächst eine Gerade durch den Nordpol $N := (0, 1)$, die S^1 an einem beliebigen Punkt a schneidet. Geben Sie dann eine Abbildung $\varphi : S^1 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^1$ auf die x-Achse an, sodass $\varphi(a)$ der Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse ist. Zeigen Sie, dass es sich bei $(\varphi, S^1 \setminus \{N\})$ um eine Karte handelt und geben Sie eine weitere Karte an, um einen Atlas für S^1 zu vervollständigen.

Aufgabe 12.4 *Mannigfaltigkeiten als Niveauflächen*
Zeigen Sie, dass der Torus

$$T^2 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1 \right\}$$

eine Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist. *Hinweis*: Versuchen Sie *nicht* explizit Karten zu konstruieren, sondern verwenden Sie den Satz von der impliziten Funktion: Bei geprüfter Vorraussetzung liefert Ihnen dieser die Existenz lokaler Parametrisierungen, die als Karten dienen.