Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 10

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 11.01.2019, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 10.1 *Wiederholung (je 2 Punkte)*

(a) Ist die Kurve $\gamma(t) := (a\cos^3(t), a\sin^3(t))$ mit $t \in [0, 2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, regulär? Berechnen Sie ihre Bogenlänge.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ hat das Zentralfeld $x \mapsto c\,x/|x|^n$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Potential auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$? Geben Sie die Potentiale explizit an.

(c) Gegeben sei eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ von σ-Algebren auf einer fixierten Menge X. Ist $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ wieder eine σ-Algebra auf X? Beweisen Sie ihre Antwort.

(d) Zeigen Sie, dass ein Maßraum genau dann vollständig ist, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge wieder eine Nullmenge ist.

(e) Es sei $(X, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ messbar und $C > 0$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie dass die abgeschnittene Funktion $f_C : X \to \mathbb{R}$ messbar ist, wobei

$$f_C(x) := \begin{cases} C, & f(x) > C \\ f(x), & |f(x)| \le C \\ -C, & f(x) < -C. \end{cases}$$

(f) Folgt für einen Maßraum $(X, \mathcal{E}, \mu)$ im Allgemeinen, dass falls $f \in L^1(X, \mu)$, auch $f^2 \in L^1(X, \mu)$ gilt? Beweisen Sie ihre Antwort.

(g) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{nx\log(x)}{1 + n^2x^2}\, \mathrm{d}\lambda(x).$$

(h) Wir betrachten die Menge $X := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \,|\, 0 < r < \varphi/2\pi\}$ und einen Diffeomorphismus $F : X \to \mathbb{R}^2$ mit $F(r, \varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. Skizzieren Sie X und $F(X)$ und berechnen Sie den Flächeninhalt $\lambda_2(F(X))$.

(i) Zeigen Sie, dass für $f \in L^1(X)$ das lineare Funktional $T_f : \mathcal{D}(X) \to \mathbb{R}$ mit $T_f(\varphi) := \int_X \varphi f \,\mathrm{d}\lambda$ eine Distribution auf X ist. *Bemerkung*: Die Dirac-Distribution ist ein Gegenbeispiel für die Umkehrung dieser Aussage.

(j) Zeigen Sie, dass eine schwache Ableitung der Funktion $a(x) = |x|$ für $x \in [-1, 1]$ durch die Vorzeichenfunktion

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

auf $[-1, 1]$ gegeben ist. Was ist die zweite schwache Ableitung von a?

- Bitte wenden -

Aufgabe 10.2 *Superposition durch Faltung (5 Bonuspunkte)*

(a) Zeigen Sie, dass für Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die sogenannte *Faltung* f.ü. existiert:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y).$$

(b) Berechnen Sie die Faltung der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot \chi_{[0,1]}(x)$ und $g = \chi_{[0,2]}$. Skizzieren Sie dann f, g und $f * g$. Haben Sie eine qualitative Erklärung für den Effekt der Faltung?

(c) Beweisen Sie für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$, d.h. $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Hinweis*: Nehmen Sie ohne Einschränkung an, dass $\|g\|_1 = 1$ und definieren Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß. Verwenden Sie dann die Ungleichung aus Aufgabe 6.4.

Aufgabe 10.3 *Fourierreihe periodischer Funktionen (5 Bonuspunkte)*

Wir betrachten den Raum $L^2_{\text{per.}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f(x + 2\pi) = f(x) \text{ f.ü.}\}$. Dieser sei ausgestattet mit dem Hermiteschen Produkt $\langle f, g\rangle := \int_{[0,2\pi]} \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $e_k(x) := (2\pi)^{-1/2}\exp(ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$, ein Orthonormalsystem bilden. *Bemerkung*: Es stellt sich heraus, dass für jedes $f \in L^2_{\text{per.}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die sogenannte *Fourierreihe*

$$x \longmapsto \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \langle e_k, f\rangle e_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle e_k, f\rangle e_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k \exp(ikx),$$

mit den *Fourierkoeffizienten* $\widehat{f}_k := (2\pi)^{-1/2}\langle e_k, f\rangle \in \mathbb{C}$, in der $L^2_{\text{per.}}$-Norm gegen f konvergiert, d.h. $\{e_k\}_k$ ist eine Hilbertraumbasis.

(b) Berechnen Sie die Fourierreihe der Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn}(x)$ auf $[-\pi, \pi]$ (periodisch fortgesetzt gedacht) und skizzieren Sie die ersten drei Partialsummen der Fourierreihe. *Hinweis*: Verwenden Sie die Eulersche Formel und die Tatsache, dass $\operatorname{sgn}(x)$ ungerade ist.

(c) Zeigen Sie ohne Konvergenzsorgen: Für $f, g \in L^2_{\text{per.}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit Fourierkoeffizienten $\widehat{f}_k$, $\widehat{g}_k$ gilt für die Faltung aus Aufgabe 10.2

$$(f * g)(x) = \int_{[0,2\pi]} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k\,\widehat{g}_k \exp(ikx).$$

Für nicht-periodische Funktionen existiert eine allgemeinere Konstruktion, bei der die diskrete Darstellung als Summe einer kontinuierlichen Darstellung als Integral weicht. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die *Fouriertransformation* durch

$$(\mathcal{F}f)(k) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\exp(-2\pi ikx)\,\mathrm{d}\lambda(x) \quad \forall k \in \mathbb{R}^n.$$

Intuitiv entspricht diese einem Grenzwert der Fourierreihe, für Funktionen deren Periode unendlich groß wird. Schränkt man den Definitionsbereich auf sogenannte "schnell fallende" Funktionen ein, wird $\mathcal{F}$ zu einer Bijektion, was sich, zusammen mit dem kontinuierlichen Analogon von 10.3(c), als besonders nützliches Werkzeug zur Lösung von Differentialgleichungen herausstellt. In der Physik ist der Übergang von der Ortsraum- zur Impulsraumbeschreibung des Systems durch die Fouriertransformation erklärt.