Plenarübung 5

29.11.2018

Themen:
* Nachtrag zu Hilbertraumbasen, physikalisches Beispiel
* Projektoren

$\underbrace{\hspace{6em}}_{}$ Nachtrag zu letzten Mal

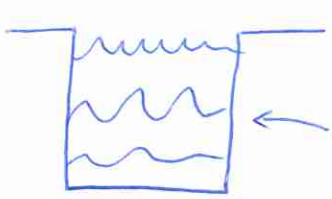
* Spektralmaß, Wahrscheinlichkeitsinterpretation, Zustandsreduktion bei Idealmessung

---

Erinnerung: Physikalisch relevante Hilberträume sind separabel, d.h. sie besitzen eine endliche oder abzählbare Basis der Form

$$\{|k\rangle\}_{k\in I}.$$

* Typisches Beispiel ist ein Teilchen im Potential



Für $V=\infty$ liefern die abzählbar vielen Moden solcher stehenden Wellen eine Hilbertraumbasis

Für endliches V gibt es eine Mode mit Energie $> V$ und die Beschreibung wird komplizierter

$\leadsto$ Fourierentwicklung auf $\mathbb{R}$ (mehr dazu vielleicht in der VL)

* Oft schränkt man deshalb das System so ein (Beispiel: geringe Energie), dass die Basis möglichst einfach, oft sogar endlich bleibt.
In so einem Fall reduziert sich alles auf lineare Algebra und Ausdrücken wie (z.B. "Zweizustandssysteme")

1) $|\text{Elektron}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{Grundzustand}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\text{1. ang. Zustand}\rangle$

2) Doppeltopf

$|l\rangle \quad |r\rangle$

$|\text{Teilchen}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|r\rangle$

Einen anderen Ursprung hat übrigens Spin

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$.

(Mehr dazu später)

Als Prototyp für den allg. Fall ist folgendes Beispiel instruktiv:

$$\mathcal{L}^2_{per.}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f(t+1) = f(t) \text{ f.ü.}, \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\} / \sim$$

$$\simeq \left\{ f : [0,1) \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ messbar und quadratint'bar} \right\} / \sim$$

mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f}(t) \, g(t) \, dt.$$

Die Funktionen

$$\xi_k(t) := e^{2\pi i k t}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

bilden eine Hilbertraumbasis, denn

$$\langle \xi_k, \xi_l \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i (l-k) t} \, dt$$

Verwende Periodizität der komplexen Exp-Fkt.

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi i (l-k)} e^{2\pi i \overbrace{(l-k)}^{\in \mathbb{Z}} t} \Big|_0^1 = 0 & ; k \neq l. \\ \int_0^1 dt = 1 & ; k = l. \end{cases}$$

und man kann zeigen, dass für alle $f \in L^2_{per.}(\mathbb{R})$ die <u>Fourier-Reihe</u>

$$f \longmapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \, e^{2\pi i t}$$

$$\text{mit } a_k = \langle \xi_k, f \rangle = \int_0^1 f(t) \, e^{-2\pi i k t} \, dt \in \mathbb{C}$$

in der $L^2_{per.}(\mathbb{R})$-Norm gegen f konvergiert.

Eine ähnliche Konstruktion funktioniert recht allgemein und man sieht oft die <u>Fourier-Entwicklung</u> eines Zustandes:

$$\psi = \sum_{i \in I} \langle \xi_i, \psi \rangle \, \xi_i$$

$$= \sum_i \langle \xi_i | \psi \rangle \, | \xi_i \rangle$$

Physiker-Schreibweise

Über $L^2_{per.}(\mathbb{R}) \simeq \ell^2(\mathbb{Z})$ bekommt man so die nützliche <u>Parseval-Gleichung</u>

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt.$$

Projektoren

Erinnerung: Für unendlichdim. Räume muss man zwischen linearen Unterräumen und abgeschlossenen lin. Unterräumen unterscheiden! Letztere sind oft speziell.

Ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ ist wieder ein Hilbertraum (mit eingeschränkten Skalarprodukt). Wir definieren das orthogonale Komplement

$$\mathcal{M}^{\perp} := \{ x \in \mathcal{H} \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in \mathcal{M} \}.$$

* $\mathcal{M}^{\perp}$ ist ein linearer Unterraum (Linearität des Produktes)
* $\mathcal{M}^{\perp}$ ist sogar abgeschlossen, denn das Produkt ist stetig:

Beweis $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$| \langle x, y \rangle - \langle x', y' \rangle | = | \langle x - x', y \rangle - \langle x', y' - y \rangle |$$

$$\text{(Dreiecks-ungl.)} \longrightarrow \leq | \langle x - x', y \rangle | + | \langle x', y' - y \rangle |$$

$$\text{(Cauchy-Schwarz-Ungl.)} \longrightarrow \leq \|y\| \cdot \|x - x'\| + \|x'\| \cdot \|y' - y\|$$

Also ist $\mathcal{M}^\perp$ ein Hilbertraum und es gilt

$\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$.

<u>Satz.</u> (Projektionssatz)

$\mathcal{H}$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum, $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ abg. Unterraum.

Dann kann jedes $x \in \mathcal{H}$ eindeutig als $x = z + w$, $z \in \mathcal{M}$, $w \in \mathcal{M}^\perp$ dargestellt werden.

---

* Dieser Satz liefert einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp \\ z + w &\longmapsto (z, w). \end{aligned}$$

* Wir nennen die lineare Abb.

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{M}} : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ y + w = x &\longmapsto y \end{aligned}$$

die <u>orthogonale Projektion</u> auf $\mathcal{M}$.

* Da $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ ist $\|P_{\mathcal{M}} x\| = \|y\| \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$ $\Rightarrow \|P_{\mathcal{M}}\| \leq 1$.

* Ist $\mathcal{M} = \{0\}$, dann ist $P_{\mathcal{M}} = 0$.

  Ist $\mathcal{M} \neq \{0\}$ gibt es ein $x \in \mathcal{M}$, $x \neq 0$, mit $P_{\mathcal{M}} x = x \implies \|P_{\mathcal{M}}\| = 1$.

* Da $P_{\mathcal{M}} x \in \mathcal{M} \quad \forall x \in \mathcal{H}$ gilt $P_{\mathcal{M}}^2 = P_{\mathcal{M}}$

Def. Ein beliebiger Operator A heißt orthogonale Projektion oder Projektor, falls ein abgeschlossener Unterraum $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ existiert mit $A = P_{\mathcal{M}}$.

Spektralmaße

→ Verallgemeinerung der Hauptachsentransformation für unendlichdim. Hilberträume.

Beispiel "Ortsoperator"

Q ein Operator auf $L^2(\mathbb{R})$ definiert durch

$$(Q\psi)(x) := x\,\psi(x).$$

* Q ist i.A. unbeschränkt.
* Q ist selbstadjungiert auf

$$D(Q) = \{\psi \mid x\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Für jede Borelmenge $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ können wir auf folgende Weise einen Operator zuordnen:

$$\Delta \longmapsto E(\Delta)$$

mit $\quad (E(\Delta)\psi)(x) := \chi_\Delta(x)\psi(x)$

$E(\Delta)$ hat folgende Eigenschaften (leichte Übung):

(i) $E(\emptyset) = 0, \quad E(\mathbb{R}) = 1$

(ii) Jedes $E(\Delta)$ ist ein Projektor

(iii) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1) \cdot E(\Delta_2)$

(iv) Für $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ ist $E(\Delta_1 \cup \Delta_2) = E(\Delta_1) + E(\Delta_2)$

(v) $\forall \; \varphi, \psi \in \mathcal{H}$ ist

$$E_{\varphi,\psi}(\Delta) = \langle \varphi, E(\Delta)\psi \rangle$$

ein komplexes Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Insbesondere gilt σ-Additivität: Für $\Delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$,

mit $\Delta_k \cap \Delta_\ell = \emptyset, \; k \neq \ell$

$$\Longrightarrow \quad E(\Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} E(\Delta_k).$$

Def. Eine Mengenfunktion $E(\cdot)$ mit den Eigenschaften (i) – (v) heißt Spektralmaß oder projektions-wertiges Maß (auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Da $|E_{\varphi,\psi}(\Delta)| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$, d.h. $E_{\varphi,\psi}$ ist ein "beschränktes Maß", folgt dass

$$\int f \, d E_{\varphi,\psi}$$

eine beschränkte Sesquilinearform ist.

Ein Lemma von Riesz $\Rightarrow$ $\exists$ beschränkter Operator $\hat{E}(f)$ mit

$$\langle \varphi, \hat{E}(f)\psi \rangle = \int f(\lambda) \, d E_{\varphi,\psi}(\lambda).$$

Es gilt: $\hat{E}(f) = \int f \, dE$.

Anwendung auf das erste Beispiel:

$$d E_{\varphi,\psi}(x) = \overline{\varphi}(x)\, \psi(x) \, dx$$

$$\Longrightarrow \quad \langle \varphi, \hat{E}(f)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \bar{\varphi}(x) \underbrace{f(x)\,\psi(x)}_{\in L^2(\mathbb{R})} \, dx$$

Setzen wir $f(x) = x$ und $\psi \in D(Q)$ gilt

$$\langle \varphi, \hat{E}(f)\psi \rangle = \langle \varphi, Q\psi \rangle$$

und damit

$$\boxed{Q = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda).}$$

<u>Spektralzerlegung des Operators</u>
<u>Q</u>.

<u>Beispiel</u> "Diskretes Spektrum".

Angenommen, A besitzt eine Hilbertraumbasis von Eigenfunktionen

* $A \underset{\text{Eigenfunktion}}{\varphi_k} = \overset{\text{Eigenwert}}{\lambda_k} \varphi_k$

* Die φ_k bilden die Eigenräume M_k zu λ_k und es gilt $M_k \perp M_\ell$ für $k \neq \ell$.

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} M_k.$$

* Jedes λ_k liefert einen Projektor P_k und

$$E(\Delta) = \sum_{\{k \mid \lambda_k \in \Delta\}} P_k$$

ist das zugehörige Spektralmaß.

* Die Spektralzerlegung von A hat die vertraute Form

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda) = \sum_k \lambda_k P_k .$$

$\rightsquigarrow$ Hier der Verweis auf den zitierten Spektralsatz im Aufschrieb von letzter Woche.

<u>Zustandsreduktion bei einer Idealmessung</u>

<u>Erinnerung:</u> Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von A im Zustand $[\psi]$ einen Wert in Δ zu finden, ist

$$W^A_{[\psi]}(\Delta) = \langle \psi, E^A(\Delta) \psi \rangle, \quad \psi \in [\psi]$$

Der Erwartungswert ist (vgl. obiges Kapitel)

$$\langle A \rangle_{[\psi]} = \int_{\mathbb{R}} x \, dW^A_{[\psi]}(x) = \langle \psi, A \psi \rangle .$$

System im Zustand $\underbrace{[\psi] \overset{\text{"Messung"}}{\rightsquigarrow} [\psi']}$

<u>Zustandsreduktion</u> durch Wechselwirkung des Systems mit der Messapparatur.

* Qualitativ: Je exakter die Messung einer ~~[illegible]~~ Observablen, desto unschärfer werden nicht-kompatible Observablen.

<u>Def.</u> / <u>Postulat</u>. Notation wie oben.

Eine Messung von A heißt <u>Idealmessung</u>, falls das Resultat in Δ liegt und dann gilt

(i) Bei erneuter Messung von A ist das Resultat garantiert in Δ:

$$W^{A}_{[\psi']}(\Delta) = \langle \psi', E^{A}(\Delta)\psi' \rangle = 1 \quad \forall \, \psi' \in [\psi'].$$

(ii) Im neuen Zustand $[\psi']$ sollen feinere Messungen im Verhältnis zu A unverändert bleiben:

$$\frac{\langle \psi', P\psi' \rangle}{\langle \psi', E^{A}(\Delta)\psi' \rangle} = \frac{\langle \psi, P\psi \rangle}{\langle \psi, E^{A}(\Delta)\psi \rangle} \quad \forall \, \underbrace{P \leq E^{A}(\Delta)}$$

Damit ist gemeint, dass für die zugeh. Unterräume gilt:

$$\mathcal{M}_P \subseteq \mathcal{M}_{E^{A}(\Delta)}$$

Im diskreten Fall heißt (ii), dass die Messapparatur auf perfekte Weise die zu A gehörigen Eigenwerte registriert und der Rest komplett "verschwindet".
Diese Formulierung ist etwas allg. und lässt kontinuierliche Spektren zu.

Dann gilt immer:

<u>Prop.</u> Der Zustand $[\psi']$ wird ~~R~~ repräsentiert durch

$$\psi' = \frac{E^A(\Delta)\psi}{\|E^A(\Delta)\psi\|}.$$

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ $E^A(\Delta)\,\psi' = \psi'$.

Sei $\phi = \dfrac{E^A(\Delta)\psi}{\|E^A(\Delta)\psi\|}$. Dann gilt für $P \leq E^A(\Delta)$

($P \cdot E^A(\Delta) = P$ in diesem Fall)

$$P\phi = \frac{P\psi}{\|E^A(\Delta)\psi\|}$$

$$\Rightarrow \langle \phi, P\phi \rangle = \langle P\phi, P\phi \rangle = \frac{\langle P\psi, P\psi \rangle}{\|E^A(\Delta)\psi\|^2}$$

$$= \frac{\langle \psi, P\psi \rangle}{\langle \psi, E^A(\Delta)\psi \rangle}.$$

(ii) $\iff \langle \psi', P\psi' \rangle = \langle \phi, P\phi \rangle \quad \forall\, P \leq E^A(\Delta)$.

Wähle: $P = P_\xi$: Projektion auf $\xi \in E^A(\Delta)\mathcal{H}$,

dann gilt wegen $P_\xi \phi = \langle \xi, \phi \rangle \xi$

$$|\langle \xi, \phi \rangle| = |\langle \xi, \psi' \rangle|$$

$$\iff \langle \xi, P_\phi \xi \rangle = \langle \xi, P_{\psi'} \xi \rangle.$$

Da $\psi', \phi \in E^A(\Delta)\mathcal{H} \implies [\phi] = [\psi']$.