Höhere Mathematik für‘s Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 9

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 21.12.2018, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 9.1 *Pfadintegral-Quantisierung*

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix, wobei wir den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ausstatten. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \langle J, x\rangle\right) \mathrm{d}\lambda_n(x) = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}} \exp\left(\frac{1}{2}\langle J, A^{-1}J\rangle\right), \quad x, J \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis: Hauptachsentransformation und quadratische Ergänzung.

Aufgabe 9.2 *Verschiebung*

Zeigen Sie für die Abbildungen

$$S : \ell^p(\mathbb{C}) \to \ell^p(\mathbb{C}); \quad (a_1, a_2, ...) \mapsto (0, a_1, a_2, ...)$$
$$T : \ell^p(\mathbb{C}) \to \ell^p(\mathbb{C}); \quad (a_1, a_2, ...) \mapsto (a_2, a_3, a_4, ...),$$

(a) S und T sind beschränkte lineare Operatoren.

(b) S ist injektiv, aber nicht surjektiv, und T ist surjektiv, aber nicht injektiv. Erklären Sie, warum so etwas in endlicher Dimension nicht passieren kann.

(c) $TS = \mathrm{id}_{\ell^p}$, aber $ST \neq \mathrm{id}_{\ell^p}$.

Aufgabe 9.3 *Fredholmscher Integraloperator*

Beweisen Sie die Beschränktheit des Integraloperators $T_k : L^2([0,1],\mu) \to L^2([0,1],\mu)$ mit

$$(T_k f)(s) := \int_{[0,1]} k(s,t) f(t) \,\mathrm{d}\mu(t),$$

wobei $k \in L^2([0,1]^2, \mu \times \mu)$. Für welche Voraussetzung an k ist $T_k : L^2([0,1],\mu) \to L^2([0,1],\nu)$, für verschiedene Maße μ und ν, ein beschränkter linearer Operator?

Aufgabe 9.4 *Normen und Differentialoperatoren*

(a) Beweisen Sie, dass der Differentialoperator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ auf dem Raum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ nicht beschränkt ist.

(b) Wir definieren die Abbildung $\|\cdot\|_{C^1} : C^1([0,1]) \to \mathbb{R}_+$ durch $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Zeigen Sie: $\|\cdot\|_{C^1}$ ist eine Norm, bezüglich der $C^1([0,1])$ ein vollständiger Raum ist und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_{C^1}) \to (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein beschränkter Operator. *Hinweis*: Sie können die Vollständigkeit von $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ohne Beweis voraussetzen.

(c) Verallgemeinern Sie die Aussage aus (b), indem Sie für kompaktes $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Norm auf $C^r(K)$ angeben, für die jeder partielle Differentialoperator

$$D = \sum_{|\alpha|\leq r} a_\alpha \partial^\alpha : (C^r(K), \|\cdot\|_?) \longrightarrow (C^0(K), \|\cdot\|_\infty), \quad a_\alpha \in C^0(K)$$

beschränkt ist.