Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 8

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 14.12.2018, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 8.1 *Nicht σ-endliches Maß im Produkt*
Für das Einheitsintervall $I = [0,1]$ statten wir den messbaren Raum $(I, \mathcal{B}(I))$ einmal mit dem Lebesgue-Maß λ und einmal mit dem Zählmaß ζ auf $\mathcal{B}(I)$ aus. Zeigen Sie, dass die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \in I \times I \,|\, x \in I\} \subset I \times I$ zwar eine $\lambda \times \zeta$-messbare Teilmenge von $I \times I$ ist (d.h. χ_Δ ist messbar), dass aber

$$\int_I \zeta(\Delta_x)\,\mathrm{d}\lambda(x) \neq \int_I \lambda(\Delta^y)\,\mathrm{d}\zeta(y).$$

Aufgabe 8.2 *Standardsimplex*
Skizzieren Sie die Menge $S_n := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \geq 0 \ \forall i, \ \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$ für $n = 1,2,3$. Zeigen Sie außerdem, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lambda_n(S_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{S_n}\,\mathrm{d}\lambda_n = \frac{1}{n!}.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Fubini und vollständige Induktion.

Aufgabe 8.3 *Rekursives Kugelvolumen*
Unser Ziel ist die Berechnung der Volumina $\lambda_n(B_1^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_1^n}\,\mathrm{d}\lambda_n$ der Einheitskugeln $B_1^n := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Erläutern Sie die Gültigkeit der Formel

$$\lambda_n(B_1^n) = \int_{-1}^1 \lambda_{n-1}\left(r(y)\,B_1^{n-1}\right)\,\mathrm{d}y = \lambda_{n-1}(B_1^{n-1}) \int_{-1}^1 r(y)^{n-1}\,\mathrm{d}y,$$

wobei $r(y) = \sqrt{1-y^2}$ und $r(y)B_1^{n-1} = B_{r(y)}^{n-1}$, anhand einer Skizze für $n = 3$. Es ist kein präziser Beweis nötig. *Bemerkung*: Hierbei handelt es sich um eine Anwendung des sogenannten "Prinzips von Cavalieri".

(b) Zeigen Sie, dass $\int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-y^2}\right)^{n-1}\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Zeigen Sie, dass $\lambda_1(B_1^1) = 2$ und $\lambda_2(B_1^2) = \pi$ und berechnen Sie dann $\lambda_{2m}(B_1^{2m})$ und $\lambda_{2m+1}(B_1^{2m+1})$ für $m \in \mathbb{N}$ mithilfe der Rekursionsformel aus Aufgabe 1.2.

Aufgabe 8.4 *Poincaré-Halbebene*
Wir betrachten die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass mit der üblichen Identifikation $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ durch $z = x + iy$ das Maß

$$A \longmapsto \int_{\mathbb{H}} \chi_A(x,y)\,\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}\lambda(x,y), \quad A \subset \mathbb{H},$$

invariant ist unter den Transformationen $M : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ mit

$$M(z) := \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Hinweis: Um sich Schreibarbeit zu ersparen, können Sie argumentieren und verwenden, dass sich die Jacobideterminante hier als $|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}M|^2$ schreiben lässt.