Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 7

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 07.12.2018, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 7.1 *Schnitt und Summe von L^p-Räumen*

Für einen Maßraum betrachten wir die zugehörigen L^p-Räume für $1 \leq p < q < r \leq \infty$. Außerdem sei $L^p \cap L^r$ der Schnitt und $L^p + L^r := \langle L^p \cup L^r \rangle_{\mathbb{R}}$ die innere Summe. Beweisen Sie: $L^p \cap L^r \subset L^q \subset L^p + L^r$. *Hinweis*: Verwenden Sie für die erste Inklusion die Hölder-Ungleichung und betrachten Sie für die zweite Inklusion eine Funktion f auf $\{x \,|\, |f(x)| > 1\}$ und $\{x \,|\, |f(x)| \leq 1\}$.

Aufgabe 7.2 *Parallelogramm-Identität*

Beweisen Sie: Auf einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{R}$ gibt es genau dann ein Skalarprodukt mit $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$, falls die Parallelogramm-Identität

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2\,, \quad x, y \in V$$

gilt. Folgern Sie, dass der normierte Raum $(L^p(\mathbb{R}, \lambda), \|\cdot\|_p)$ für $p \neq 2$ kein Hilbertraum ist. *Hinweis*: Betrachten Sie den Ausdruck $\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\,\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\,\|x-y\|^2\,, x, y \in V$.

Aufgabe 7.3 *Nicht-separable Hilberträume*

(a) Zeigen Sie, dass $L^\infty(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$ nicht-separabel ist. *Hinweis*: Berechnen Sie den Abstand der Funktionen $\{\chi_{B_r(0)}\}_{r>0} \subset L^\infty$ zueinander.

(b) Wir betrachten den Vektorraum

$$H := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, \mathrm{spt}(f) \text{ ist höchstens abzählbar und } \textstyle\sum_{x\in[0,1]} |f(x)|^2 < \infty\}.$$

Zeigen Sie, dass H zusammen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \sum_{x\in[0,1]} f(x)g(x)$ ein nicht-separabler Hilbertraum ist. *Hinweis*: Identifizieren Sie den relevanten Maßraum und verwenden Sie Satz 3.24.

Aufgabe 7.4 *Metrisierbarkeit von Konvergenzbegriffen*

(a) Zeigen Sie: Es gibt keine Metrik d auf $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ mit der Eigenschaft, dass eine Folge $(f_k)_k$ genau dann punktweise f.ü. gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, wenn sie bezüglich d gegen f konvergiert, d.h. $d(f_k, f) \to 0$ für $k \to \infty$. *Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass eine Folge $(f_k)_k$ in einem metrischen Raum bezüglich d gegen f konvergiert, wenn jede Teilfolge $(f_{k_l})_l$ eine gegen f bezüglich d konvergente Teilfolge $(f_{k_{l_m}})_m$ besitzt. Wenden Sie dann Proposition 3.30 auf ein geeignetes Beispiel an.

(b) Es sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$. Wir betrachten den Raum der messbaren Funktionen $L^0(X, \mu) := \{f : X \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ messbar}\} / \sim$, wobei $f \sim g :\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ f.ü.. Auf L^0 definieren wir den Abstandsbegriff

$$d(f, g) := \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \mathrm{d}\mu.$$

Beweisen Sie, dass (L^0, d) ein metrischer Raum ist und dass eine Folge $(f_k)_k$ genau dann bezüglich d gegen $f = 0$ konvergiert, wenn sie im Maß gegen $f = 0$ konvergiert. *Hinweis*: Für $x \in [0, \infty)$ ist die Funktion $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ monoton wachsend und durch 1 beschränkt. Integrieren Sie für eine Richtung getrennt über $\{f \,|\, |f_n - f| > \delta\}$ und $\{f \,|\, |f_n - f| \leq \delta\}$, für die andere Richtung nur über erstere Menge.