Plenarübung 4 22.11.2018

Themen: * Mehr zu Hilberträumen

* Formale Prinzipien der Quantenmechanik, Unschärferelation

Erinnerung: Ein reeller Prähilbertraum ist ein $\mathbb{R}$-VR H mit Skalarprodukt

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

Ein Prähilbertraum der vollständig bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm ist,

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

heißt Hilbertraum.

Beispiele: * $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{std})$ ist ein Hilbertraum

* Jeder endlichdim. Prähilbertraum ist ein Hilbertraum (Gram-Schmidt liefert Isometrie mit $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{std})$).

* Eines der wichtigsten Beispiele liefern die $\mathcal{L}^p$-Räume für $p = 2$:

Aus der Vorlesung: (X, Σ, μ) ein Maßraum

<u>Def</u>: $\mathcal{L}^p(X,\mu) = \{ f : X \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty \}$

mit $\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$!

<u>Problem</u>: $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü.

In den kommenden Vorlesungen werden wir sehen:

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim$$

mit $f \sim g :\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ f.ü.

sind für alle $p \in [1, \infty]$ <u>Banachräume</u> (d.h. vollständige Normierte Räume).

Der Raum $L^2(X,\mu)$ ist dann sogar ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_X \varphi(x)\psi(x)\, d\mu(x) \; ; \; \varphi, \psi \in L^2(X,\mu)$$

Ein weiterer wichtiger Spezialfall eines L^2-Raumes ist $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu(\{n\}) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$\ell^2(\mathbb{N}) := L^2(\mathbb{N}, \mu)$ ist dann der "Folgenraum" der quadratsummierbaren Folgen $(x_k)_k$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 < \infty$.

* Addition und Multiplikation ist komponentenweise zu verstehen (siehe letztes Mal).
* Das Skalarprodukt ist

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \quad ; (x_k)_k, (y_k)_k \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

<u>Konzept einer Basis</u>

Im unendlichdim. Fall dient das Gram-Schmidt-Verfahren <u>nicht</u> zur Konstruktion einer Vektorraumbasis.

Z.B. ist für $\ell^2(\mathbb{N})$ das System $(e_i)_{i=1,2,\dots}$ mit

$$e_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{0, 1}, 0, \dots, \dots)$$

zwar orthonormal, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, aber keine Basis, denn $\ell^2(\mathbb{N})$ ist nicht von abzählbarer Dimension.
Es lässt sich auch nicht zu einer ONB ergänzen:

$$\begin{aligned}(e_i)_i^{\perp} &= \{ (a_k)_k \mid \langle e_i, (a_k)_k \rangle = 0 \ \forall i \} \\ &= \{ (a_k)_k \mid a_i = 0 \ \forall i \} \\ &= \{0\}.\end{aligned}$$

<u>Aber</u> jede Folge $(a_k)_k \in \ell^2(\mathbb{N})$ lässt sich bel. genau durch endl. Linearkomb. der e_i approximieren:

<u>Def.</u> $$a_k^{(n)} = \begin{cases} a_k & ; k \leq n \\ 0 & ; k > n. \end{cases}$$

Dann ist $$\lim_{n\to\infty} \| (a_k^{(n)} - a_k)_k \|_2 = 0$$

ℓ^2 - Norm!

Das führt auf folgenden Begriff:

<u>Def.</u> Eine Teilmenge $(b_i)_{i\in I} \subset (H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt <u>Hilbertraumbasis</u>, falls $\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$ und $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(b_i)_i \subset H$ dicht.

irgendeine Indexmenge

H heißt <u>separabel</u>, falls er eine endliche oder abzählbare Basis besitzt.

<u>Fakt:</u> Ein sep. Hilbertraum ist entweder endlichdim. oder isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N})$:

$$i : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow H \qquad (\text{Übung})$$
$$(a_k)_k \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

Prinzip: In der Physik spielen nur separable Hilberträume eine Rolle! Das hat mit der Erreichbarkeit beliebig guter Messungen in endlich vielen Schritten zu tun.

Man schreibt dann oft

$$\{ |k\rangle \mid k \in \mathbb{N} \}$$

als Basis.

Der Hilbertraum in der Quantenmechanik

Zustand in der klassischen Mechanik $\longleftrightarrow$ Punkt in einem metrischen Raum

Zustand in der Quantenmechanik $\longleftrightarrow$?

Die QM beschreibt ein physikalisches System zunächst durch eine "Wellenfunktion":

$$\underbrace{\Psi(x)}_{\substack{\uparrow \\ x:\ \text{physikalischer Input (Ort, Impuls, ...)}}} \rightsquigarrow \underbrace{\text{Amplitude}}_{\in\, \mathbb{C}} \longrightarrow |\text{Amplitude}| \in \mathbb{R}$$

$|\text{Amplitude}|$ $\rightsquigarrow$ "Wahrscheinlichkeit" für einen experimentellen Befund.

Es stellt sich heraus, dass für so eine Beschreibung der korrekte Zustandsraum der komplexe Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ ist, d.h.

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, \lambda; \mathbb{C})$$

$$= \{ f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \mid \lambda\text{-messbar und } \|f\|_2 < \infty \}.$$

So ein komplexer Vektorraum trägt ein Skalarprodukt von der Form

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

mit (i) $\langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{H}$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(iii) $\mathbb{C}$ - Linearität im ersten Argument (mit (ii) folgt dann $\mathbb{C}$ - Antilinearität im zweiten Argument)

Es handelt sich also um eine hermitesche Sesquilinearform.

Für $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, \lambda; \mathbb{C})$ ist $\langle \cdot , \cdot \rangle$ geg. durch

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\psi}(x) \, d\lambda(x)$$

Je zwei unendlichdimensionale separable Hilberträume sind isomorph.

$\rightsquigarrow$ Physikalische Information steckt in den <u>linearen Abbildungen</u> zwischen diesen Räumen!

* Häufig werden relevante Beispiele auf den endlichdim. Fall reduziert (Doppeltopf-Potential oder Ähnliches). Dann ist z. B. der Hamilton-"Operator" eine selbstadj. Matrix und hat damit reelle Eigenwerte, mit denen man das System beschreibt.

* Im unendlichdim. Fall ist mehr zu tun, um unendlich viel Information in den Griff zu bekommen. Zentral ist dabei die <u>Norm</u> und die <u>Einschränkung</u> auf <u>geeignete</u>, <u>dichte</u> <u>Unterräume</u>. Das führt auf den nächsten Begriff.

Prop. / Def. V, W Banachräume.

Ein <u>linearer Operator</u> auf V ist ein dichter Unterraum $D(A) \subset V$ zusammen mit einer lin. Abb. $A : D(A) \to W$.

A ist genau dann stetig, wenn A <u>beschränkt</u> ist, d.h.

$$\|A\| = \sup \{ \|A(u)\| \mid \|u\| = 1 \} < \infty$$

Operator-Norm

(vgl. endlichdim. Fall)

<u>Beispiele</u>

$$(q\psi)(x) := x\,\psi(x)$$
$$(p\psi)(x) := -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x)$$

Im Allg. <u>nicht</u> beschränkt. (rechte Seite nicht quadrat-integrierbar).

$\rightsquigarrow$ Einschränkung auf geeignete Definitionsbereiche $D(A)$ auch in der Physik wichtig.

Im beschränkten Fall hat ein lin. Operator besonders viel Struktur und es gelten nützliche Sätze, wie z.B.

Theorem. (Darstellungssatz von Riesz)

Wir betrachten beschränkte lineare Operatoren

$$A : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \quad \text{(auch "lin. Funktionale", siehe VL)}$$

Der Raum

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) = \{ A : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \mid \underbrace{\|A\|}_{\text{Op.-Norm}} < \infty \}$$

ist dann ein separabler Hilbertraum.

Die Abbildung

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$$

$$v \longmapsto (v^\flat : w \longmapsto \langle v, w \rangle)$$

ist ein Anti-Isomorphismus. (Vgl. Dualräume in der lin. Algebra).

In der Physik schreibt man

$$(|\psi\rangle)^\flat =: \langle \psi |$$

In diesem Sinne sind Ausdrücke wie $\langle \psi | \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$ oder $\langle \psi | A | \varphi \rangle = \langle \psi, A\varphi \rangle$ zu verstehen.

Zur Interpretation als "statistische Erwartungswerte der zu Operatoren assoziierten Observablen" braucht man noch:

Prop./Def. $A : D(A) \longrightarrow \mathcal{H}$, $D(A) \subset \mathcal{H}$ dicht.

(i) Es existiert höchstens ein $v^A \in \mathcal{H}$, sd.

$$\langle v^A, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall w \in D(A).$$

(ii) Die Menge $\{ v \in \mathcal{H} \mid \exists\, v^A \in \mathcal{H} \} =: D(A^+)$ ist ein lin. Unterraum und $v \mapsto v^A$ linear.

Man nennt das Paar $(D(A^+), A^+)$ mit $A^+(v) := v^A$ den **zu A adjungierten Op.**

Bem: i. A. ist $D(A) \neq D(A^+)$!

(iii) A heißt **symmetrisch** (oder **hermitesch**), falls $D(A) \subset D(A^+)$ und $A^+|_{D(A)} = A$.

$$\iff D(A) \ni v \longmapsto \langle v, Av \rangle \text{ reell}$$ (vgl. endlichdim. Fall)

(iv) A heißt **selbstadjungiert**, falls $D(A^+) = D(A)$.

Bem. Z.B. die Fälle p, q sind hierbei wieder subtil: Diese muss man "selbstadj. fortsetzen".

Es gilt dann:

Verallgemeinerung des Satzes aus der linearen Algebra.

Theorem. (Spektralsatz)

Es gibt eine eindeutige Beziehung

$$\text{selbstadj. } A \longleftrightarrow \text{Maß } E^A \text{ auf } \mathcal{H}.$$

(Das sog. "Spektralmaß")

Es gilt dann $A = \int_{\mathbb{R}^n} x \, dE^A(x)$.

Grundbegriffe der QM:

1) Ein Zustand ist ein Einheitsstrahl

$$[\psi] = \{ e^{i\alpha} \psi \mid \psi \in \mathcal{H}, \ \|\psi\|_2 = 1, \alpha \in \mathbb{R} \}$$

So eine Phase ändert die physikalische Information in | Amplitude | nicht.

M.a.W. ist ein Zustand ein Punkt in

$\mathcal{H}/\sim$ für $\psi \sim \varphi :\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\psi = e^{i\alpha} \varphi$.

$\mathcal{H}/\sim$ ist ein <u>projektiver</u> Hilbertraum.

$\rightsquigarrow$ Die Frage, wie sich räumliche (oder raumzeitliche) Symmetrien des Systems auf $\mathcal{H}/\sim$ übertragen, ist deshalb besonders interessant (mehr dazu vielleicht später).

2) Eine Observable ist ein selbstadj. Operator auf $\mathcal{H}$.

3) Man hat folgende <u>Wahrscheinlichkeits-Interpretation</u>:

Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von A im Zustand $[\psi]$ einen Wert in Δ zu finden, ist

$$W^A_{[\psi]}(\Delta) = \langle \psi, E^A(\Delta)\psi \rangle, \quad \psi \in [\psi].$$

$\uparrow$ Verteilung im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Der entsprechende Erwartungswert ist demnach

$$\langle A \rangle_{[\psi]} = \int x \, dW^A_{[\psi]}(x) = \langle \psi, A\psi \rangle$$

$$= \langle \psi | A | \psi \rangle$$

(Physikerschreibweise)

Unschärferelation

Wir betrachten nur beschränkte Operatoren. Ähnliche Aussagen gelten im unbeschränkten Fall, sind dann aber etwas anders zu formulieren.

Für $\psi \in D(A)$ ist die Unschärfe (oder Streuung) einer Messung von A im Zustand $[\psi]$

$$(\Delta A)^2_{[\psi]} = \| A\psi \|^2 - \langle \psi, A\psi \rangle^2$$

$$= \| (A - \langle \psi, A\psi \rangle)\psi \|^2$$

$$\Longrightarrow (\Delta A)_{[\psi]} = \| (A - \langle \psi, A\psi \rangle)\psi \| .$$

Es gilt

Prop. (Unschärferelation)

A, B lin. Operatoren und $\psi \in D(A) \cap D(B)$.

Dann ist

$$(\Delta A)_{[\psi]} (\Delta B)_{[\psi]} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle_{[\psi]} \right| .$$

Beweis

Setze $\hat{A} = A - \langle A \rangle_{[\psi]}$, $\hat{B} = B - \langle B \rangle_{[\psi]}$.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist dann

$$0 \leq \| (\hat{A} + i\alpha \hat{B}) \psi \|^2 = (\Delta A)^2_{[\psi]} + \alpha^2 (\Delta B)^2_{[\psi]} + \alpha \langle i [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_{[\psi]} .$$

Die Diskriminante der quadratischen Form muss deshalb ≤ 0 sein. Das heißt:

$$\langle i [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2_{[\psi]} - 4 (\Delta A)^2_{[\psi]} (\Delta B)^2_{[\psi]} \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow (\Delta A)^2_{[\psi]} (\Delta B)^2_{[\psi]} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle_{[\psi]} \right| .$$