Plenarübung 3

15.11.2018

Themen: * (Überdeckungs)kompaktheit

* Unendlichdimensionale Vektorräume, Lemma von Riesz und Konsequenzen.

Kompaktheit

Im letzen Semester wurde Kompaktheit in Form von Folgenkompaktheit ("Jede Folge besitzt eine konv. Teilfolge" ...) schon als wichtige Eigenschaft metrischer Räume kennengelernt, vor Allem im Hinblick auf Eigenschaften stetiger, reellwertiger Funktionen.

Etwas allgemeiner ist das geometrisch motivierte Konzept der Überdeckungskompaktheit, ab jetzt einfach Kompaktheit.

Definition. $X := (X, d)$ ein metrischer Raum.
Eine Familie von Mengen $\{A_\alpha \subseteq X\}_{\alpha \in I}$ heißt Überdeckung der Teilmenge $K \subseteq X$, falls

$$K \subseteq \bigcup_\alpha A_\alpha .$$

$\{A_\alpha\}_\alpha$ heißt offen, falls alle A_α offen in X sind.

$K \subseteq X$ heißt <u>Kompakt</u> falls <u>jede</u> offene Überdeckung $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \underset{\text{beliebig}}{I}}$ eine endliche Unterfamilie $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \underset{\text{endlich}}{E} \subset I}$ besitzt, die immernoch eine Überdeckung ist, d.h.

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in E} A_\alpha .$$

Man sagt dann: Jede offene Überdeckung von K hat eine endliche <u>Teilüberdeckung</u>.

<u>Beispiele</u>: 1) Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit GW a. Dann ist $K := \{a\} \cup \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ kompakt.

<u>Beweis</u> Sei $\{\mathcal{O}_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein α_0 mit $a \in \mathcal{O}_{\alpha_0}$ und α_k, $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in \mathcal{O}_{\alpha_k}$. Da $\lim_{k \to \infty} x_k = a$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$x_k \in \mathcal{O}_{\alpha_0} \quad \forall k > N.$$

Dann ist $\{\mathcal{O}_{\alpha_k} \mid 0 \leq k \leq N\} \cup \{\mathcal{O}_{\alpha_0}\}$ eine endliche Teilüberdeckung.

2) 1) ist falsch, falls $a \notin K$.

Beweis

Sei $X = \mathbb{R}$ und $K = \{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N} \}$. Definiere

$$\mathcal{O}_1 := \left(\frac{1}{2}, 2 \right), \ldots, \quad \mathcal{O}_k := \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k-1} \right), \ldots$$

Dann ist $\{\mathcal{O}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K, bei der jedes $\mathcal{O}_k$ genau ein Element von K enthält. Damit kann keine endliche Teilüberdeckung existieren.

Weitere Charakterisierung kompakter Teilmengen

Es gilt zwar:

Prop. Eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ ist abgeschlossen und beschränkt.

Aber die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.
(Beispiel später).

Die beiden wichtigsten Erkenntnisse in diesem Kontext sind die folgenden Sätze.

Satz. Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist.

Für allgemeinere "topologische" Räume gilt dieser Satz wieder nicht.

Satz (Heine-Borel). Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{K}^n$) ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist (z.B. Intervalle $[a,b]$).

Weitere nützliche Eigenschaften: (X, Y metrische Räume)

Prop. Ist X kompakt und $f: X \to Y$ stetig, dann ist $f(X)$ kompakt.

Beweis

Es ist $X \to f(X)$ surjektiv. Sei $\{V_\beta\}_\beta$ eine offene Überdeckung von $f(X)$, dann finden wir Urbilder $\{f^{-1}(V_\beta)\}_\beta$, was eine offene Überdeckung von X liefert. Wegen der Kompaktheit von X gibt es dazu eine endliche Teilüberdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$, die Bilder der U_α liefern dann eine endliche Teilüberdeckung von $\{V_\beta\}_\beta$ für $f(X)$.

Prop. Ist X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen, dann ist A kompakt.

Beweis Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von A mit Teilmengen $U_\alpha \subseteq X$.

Dann ist $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\} \cup \{\underbrace{X \setminus A}_{\text{offen in } X}\}$ eine offene

Überdeckung von X. Wegen der Kompaktheit von X finden wir eine endliche Teilüberdeckung und sind fertig.

<u>Prop.</u> Ist X kompakt, $f: X \to Y$ stetig und bijektiv, dann ist f ein Homöomorphismus.

<u>Beweis</u> Es ist zu zeigen, dass <u>f^{-1} stetig ist.</u>

$\iff$ f ist <u>abgeschlossen</u> (d.h. ist $A \subset X$ abg. dann ist $f(A)$ abg. in Y).

Angenommen $A \subset X$ ist abgeschlossen.

X kompakt $\Rightarrow$ A kompakt.

$\Rightarrow$ $f(A)$ kompakt.

$\Rightarrow$ $f(A)$ abgeschlossen.

Unendlichdimensionale Vektorräume

Grundidee der Funktionalanalysis:

Interpretiere Folgen oder Funktionen als Punkte in geeigneten Vektorräumen und analytische Probleme durch Abbildungen auf solchen Räumen. Diese Räume sind typischerweise unendlich dimensional und mit einer Norm versehen.

Beispiel: Raum der beschränkten Folgen ($K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

$$\ell^\infty(K) := \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty. \}$$

* Ist ein K-VR bezüglich

$$+ : \ell^\infty(K) \times \ell^\infty(K) \longrightarrow \ell^\infty(K)$$
$$((x_k), (y_k)) \longmapsto (x_k)+(y_k) := (x_k + y_k)$$

$$\cdot : K \times \ell^\infty(K) \longrightarrow \ell^\infty(K)$$
$$(\alpha, (x_k)) \longmapsto \alpha \cdot (x_k) := (\alpha x_k).$$

* Ist ausgestattet mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

* Ist sicherlich <u>nicht endlich erzeugt</u>. Wir sagen dann, $\ell^\infty(K)$ sei unendlichdimensional, $\dim(\ell^\infty(K)) = \infty$.

⌈ Es stellt sich heraus, dass <u>jeder</u> Vektorraum eine Basis besitzt (im Fall $\dim = \infty$ braucht man dafür das Auswahlaxiom). Dafür gibt es verschiedene Konstruktionen.

⟶ Mehr dazu später in der Vorlesung im Fall von unendlichdimensionalen Hilberträumen. ⌋

Zurück zur Kompaktheit:

Prop. Der Einheitsball $\underbrace{\{x \mid \|x\|_\infty \leq 1\}}_{=:B} \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$ ist nicht kompakt.

Beweis

Sei $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.
$\uparrow$ i-te Stelle

Betrachte die Folge $(e_i)_i \subset B$. Dann ist

$$\|e_i - e_j\|_\infty = 1 \quad \forall\, e_i, e_j \text{ mit } i \neq j.$$

Damit besitzt $(e_i)_i$ keine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist und somit auch keine, die konvergiert. $\Rightarrow$ B ist nicht folgenkompakt.

B ist ein metrischer Raum $\Rightarrow$ B ist nicht kompakt.

Bemerkung: Es gibt wieder einige Sätze aus der Funktionalanalysis (Banach-Alaoglu, Kolmogorov-Riesz, Arzelà-Ascoli, James, Grothendieck), die kompakte Teilmengen im unendlichdim. Fall charakterisieren, aber etwas den Rahmen sprengen würden.

Lemma von Riesz und Konsequenzen

Jeder endlichdim. lin. Teilraum eines normierten Vektorraumes ist abgeschlossen. Im unendlichdim. Fall gilt das nicht.

Beispiel

$$S := \{ (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{K}) \mid \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n = 0 \ \forall\, n \geq N \}$$

ist ein linearer Teilraum aber nicht abgeschlossen.

Betrachte: $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \in \ell^\infty(\mathbb{K}) \setminus S$

und $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots,\right) \in S.$

Dann ist

$$\| x - x_n \|_\infty = \left\| \left(0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots\right) \right\|_\infty$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

und $\lim_{n \to \infty} \| x - x_n \|_\infty = 0 \implies \lim_{n \to \infty} x_n = x.$

$$\implies x \in \overline{S} \setminus S$$

$$\implies S \text{ nicht abgeschlossen.}$$

In der Funktionalanalysis haben abgeschlossene Teilräume oft einen ausgezeichneten Stellenwert. Zum Beispiel gilt:

Lemma (Lemma von Riesz).

Sei X ein normierter Vektorraum und U ein abg. echter Teilraum ($U \neq X$). Sei $0 < \delta < 1$. Dann existiert ein $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und

$$\|x_\delta - u\| \geq 1 - \delta \quad \forall u \in U.$$

⌈ x_δ ist Substitut für den "Vektor der orthogonal auf U steht", wenn das Konzept von Orthogonalität nicht anwendbar ist. ⌋

Beweis

Sei $x \in X \setminus U$. Da U abg., gilt $d := \inf\{\|x - u\| \mid u \in U\} > 0$, andernfalls gäbe es eine Folge (u_n) in U mit $\|u_n - x\| \to 0$ und $x \in \bar{U} = U$.

$\Rightarrow d < \frac{d}{1-\delta}$ und es existiert ein $u_\delta \in U$ mit $\|x - u_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$. Setze

$$x_\delta := \frac{x - u_\delta}{\|x - u_\delta\|}.$$

Dann ist $\|x_\delta\| = 1$.

Ist jetzt $u \in U$ beliebig, dann ist

$$\|x_\delta - u\| = \left\| \frac{x}{\|x-u_\delta\|} - \frac{u_\delta}{\|x-u_\delta\|} - u \right\|$$

$$= \frac{1}{\|x-u_\delta\|} \| x - \underbrace{(u_\delta + \|x-u_\delta\| u)}_{\in U} \|$$

$$\geq \frac{d}{\|x-u_\delta\|} > 1-\delta.$$

Zuletzt wollen wir zeigen, dass die Eigenschaft

abgeschlossen + beschränkt $\Leftrightarrow$ kompakt

in geeignetem Sinne endlichdim. Räume charakterisiert.

Satz. Für einen normierten Vektorraum X sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) Die abgeschlossene Einheitskugel $B := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt.

(iii) Jede beschränkte Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii) Heine - Borel.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ist klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen, es wäre $\dim X = \infty$.

Sei $x_1 \in X$ mit $\|x_1\| = 1$ beliebig und $U_1 = \operatorname{span}_K(x_1) \subset X$. Dann ist $U_1 \neq X$ endlichdim. und damit abgeschlossen.

Für $\delta = \frac{1}{2}$ folgt mit dem Lemma von Riesz:

$$\exists\, x_2 \in X \text{ mit } \|x_2\| = 1, \text{ sowie } \|x_2 - x_1\| \geq 1 - \frac{1}{2}.$$

Setze $U_2 := \operatorname{span}_K(x_1, x_2) \subset X$.

Für $\delta = \frac{1}{3}$ hat man dann wieder

$$\exists\, x_3 \in X \text{ mit } \|x_3\| = 1, \text{ sowie}$$

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{2}{3}, \quad \|x_3 - x_2\| \geq \frac{2}{3}.$$

$\rightsquigarrow$ Induktiv: $U_{n-1} := \operatorname{span}_K(x_1, \dots, x_{n-1}) \subsetneq X$

Für $\delta = \frac{1}{n}$

$\rightarrow \|x_n\| = 1, \ \|x_n - x_i\| \geq 1 - \frac{1}{n} \ \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.

$\rightarrow$ Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)}$ mit $\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Diese hat nach dem gleichen Argument wie vorhin keine Teilfolge, die Cauchyfolge ist.