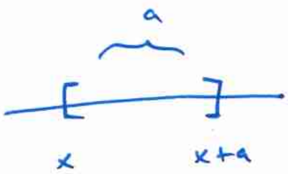
Plenarübung 2

08.11.2018

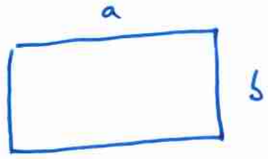
Themen:
* Maßproblem & Vitali-Menge
* Messbarkeit nach Carathéodory & Maßerweiterung

Maßproblem

Es geht uns um die Zuweisung von Volumina zu Teilmengen des $\mathbb{R}^n$:

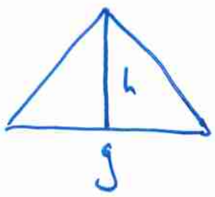


$\rightsquigarrow$ Länge $= x + a - x = a$



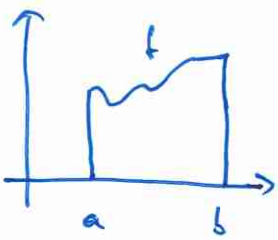
$\rightsquigarrow$ Fläche $= a \cdot b$

$\vdots$



$\rightsquigarrow$ Fläche $= \frac{g \cdot h}{2}$

$\vdots$



$\rightsquigarrow$ Fläche $= \int_a^b f(x)\, dx.$

Frage: Gibt es eine Funktion $\mu: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$, die jeder Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ auf konsistente Weise ihr "Volumen" zuweist?
(Das beinhaltet auch pathologische Fälle wie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, Fraktale, oder die Funktionen aus Aufgabe 0.4.)

So gestellt, ist die Antwort auf die Frage "Ja", aber führt uns direkt zu trivialen Konstruktionen wie

$$\mu: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$$
$$A \longmapsto \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ \infty & , \text{sonst} \end{cases},$$

die weit weg von geometrischer Anschauung sind und kaum praktischen Nutzen haben.

Für einen sinnvollen Volumenbegriff fordern wir also noch zusätzliche geometrisch / physikalisch motivierte Eigenschaften von μ:

(i) Monotonie: $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(ii) Invarianz unter affiner Isometrie: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\mu(TA) = \mu(L(A) + b) = \mu(A) \quad ; \quad L \in O(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

(iii) <u>Normierung</u>: $\mu([0,\ell]^n) = \ell^n$, $\ell > 0$.

(iv) <u>σ-Additivität</u>: $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

<u>Bem.</u> (iv) $\Rightarrow$ (i).

Die Antwort auf diese modifizierte Frage ist tatsächlich "<u>Nein</u>" (Vitali, 1905). (Zumindest in der Standardformulierung.)

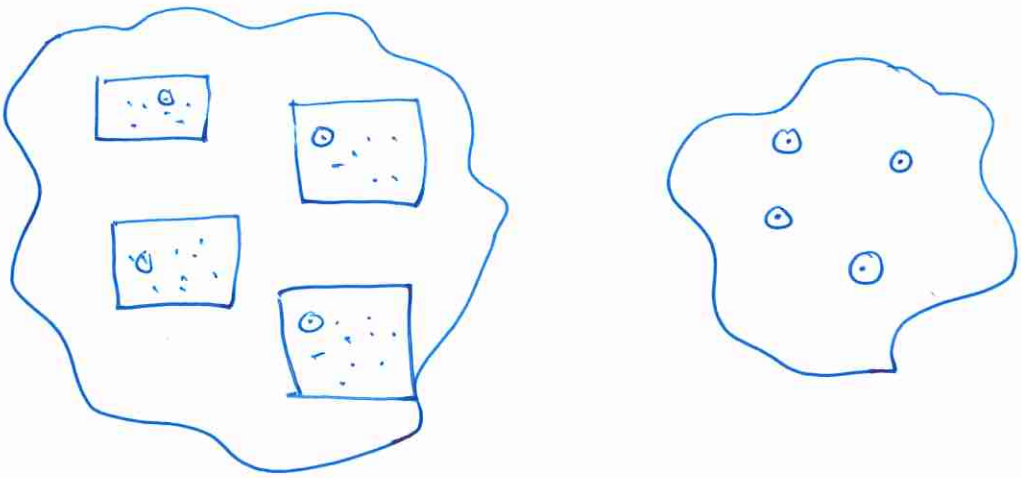
Einschub: <u>Das Auswahlaxiom</u>

Eine <u>Auswahlfunktion</u> ist eine Abbildung $\quad (X_i \neq \emptyset)$

$$F: \{X_i\}_{i\in I} \longmapsto \{\underset{\in X_i}{f(X_i)}\}_{i\in I}$$

Kollektion von Mengen

Kollektion von <u>Elementen</u> (jeweils eins) der Mengen X_i.



<u>Beispiele</u> : * endliche Mengen X_i $\rightsquigarrow$ kein Problem, explizite Konstruktion

* $X_i \subset \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$ wähle kleinstes Element.

* $X_i = [a, b] \subset \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ wähle Mittelpunkt.

Für <u>beliebige</u> Mengenkollektionen $\{X_i\}_i$ steht einem aber <u>kein</u> solches Schema zur Verfügung.

In so einem Fall <u>könnten</u> wir einfach fordern:

<u>Axiom:</u> Für beliebige $\{X_i\}_i$ existiert eine Auswahlfunktion. Auch wenn wir sie <u>nicht</u> kennen.

<u>Bemerkungen</u> * Mengentheorie mit und ohne Auswahlaxiom ist widerspruchsfrei (falls der Rest widerspruchsfrei ist) (Gödel 1938)

* Nimmt man die Gültigkeit des Auswahlaxioms an, lassen sich einige unintuitive Aussagen folgern (z.B. $\# A = \# (A \times A)$), aber auch viele sehr nützliche:
Jeder Vektorraum hat eine Basis, Jeder Körper hat einen algebraischen Abschluss, Tychonoff's Theorem, ...

* Typischerweise fordert man deshalb die Gültigkeit des Auswahlaxioms.

$\lrcorner$

<u>Konstruktion einer "Vitali-Menge":</u>

Definiere Äquivalenzrelation auf $[0,1]$

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x-y \in \mathbb{Q}$$

Auswahlaxiom $\Longrightarrow$ Wir können aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element auswählen und fassen diese zur Menge V zusammen.
(Wir können diese Menge <u>nicht</u> explizit angeben!)

Sei $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ~~eine~~ ~~die~~ eine Folge, die die rationalen Zahlen eindeutig durchnummeriert.

Definiere $V_k := V + p_k = \{v + p_k \mid v \in V\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt (i)* $V_k \cap V_l = \emptyset$ für $k \neq l$.

(ii)* $[0,1] \subseteq \bigcup_k V_k \subseteq [-1,2]$

(Übung)

Angenommen, es gäbe eine Funktion μ mit den Eigenschaften (i) – (iv). Dann folgt mit (i)* und (ii)*

$$1 \leq \mu\Big(\bigcup_k V_k\Big) \leq 3$$

$$\Big\Vert \longleftarrow \text{Translationsinvarianz und } \sigma\text{-Additivität.}$$

$$\sum_k \mu(V) = \infty$$

Es gibt also Mengen, die nicht "messbar" sind. Die Frage der Messbarkeit hat also interessanten Inhalt und führt uns zur Maßtheorie.

Messbarkeit nach Carathéodory & Maßerweiterung

Idee: Gibt es einen systematischen Weg, ein sinnvolles Maß genau für die messbaren Mengen zu konstruieren?

Tatsächlich stellt sich heraus, dass die wichtigsten Maße (vorallem das Lebesgue-Maß), dem gleichen Konstruktionsschema folgen:

1. Wir starten mit $\mathcal{P}(X)$ (z.B. $X = \mathbb{R}^n$) und def. ein äußeres Maß: $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ mit

z.B. das äußere Lebesgue-Maß

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ falls $A \subset B$

(iii) $\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i)$ (σ-Sub-Additivität.)

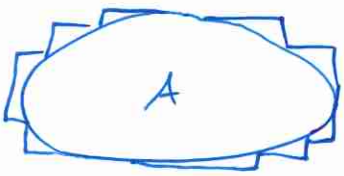
μ^* ist nicht ganz ein Maß, aber dafür können wir es mit sinnvollen Eigenschaften (z.B. (i) – (iv)) ausstatten, was beim Maß ja für Probleme sorgte.

② Wir schränken μ^* in geeigneten Sinne auf "messbare" Mengen ein um ein Maß auf der kleineren Kollektion zu erhalten.
z.B. auf die Vitali-Menge müssen wir dabei verzichten.

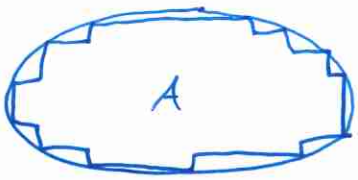
<u>Geometrische Motivation</u>

$A \subset D \subset \mathbb{R}^n$, λ^* - äußeres Lebesgue Maß.

$\lambda^*(A)$ liefert eine "Approximation von Außen" von A:



$\lambda^*(D) - \lambda^*(D \setminus A)$ liefert eine "Approximation von Innen" von A:



Spezialfall: Beide Begriffe stimmen überein.

Def. $A \subset X$ heißt μ^*-messbar oder messbar nach Carathéodory, falls gilt:

$$\mu^*(D) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \quad \forall D \subset X.$$

Die Konstruktion von vernünftigen, nicht-trivialen Maßen, für die Mengen, die μ^*-messbar sind, liefert dann

Theorem (Carathéodory).

Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Dann ist

$$\mathcal{A}(\mu^*) := \{ A \subset X \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar} \}$$

eine σ-Algebra auf X und

$$\mu := \mu^* \big|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$$

ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{A}(\mu^*)$.

Beweis

Schritt 1: $\mathcal{A}(\mu^*)$ ist eine Algebra, d.h.

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}(\mu^*)$

(ii) $A \in \mathcal{A}(\mu^*) \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}(\mu^*)$

(iii) $A, B \in \mathcal{A}(\mu^*) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}(\mu^*)$

Äquivalent zu den Bed. aus der Vorlesung.

(i) ist klar.

(ii) Folgt aus der Symmetrie in A, A^c der Eigenschaft μ^*-messbar.

(iii) Seien $A, B \in \mathcal{A}(\mu^*)$, $D \subset X$. Dann ist

$$\mu^*(D) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D)$$

und

$$\mu^*(A^c \cap D) = \mu^*(B \cap A^c \cap D) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap D)$$

da B μ^*-messbar ist.

σ-Subadditivität von μ^* impliziert

$$\mu^*(D) \geq \mu^*\big(\underbrace{(A \cap D) \cup (B \cap A^c \cap D)}\big) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap D).$$

$$[A \cup (B \cap A^c)] \cap D = (A \cup B) \cap D.$$

Außerdem ist $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$$\Longrightarrow \mu^*(D) \geq \mu^*((A \cup B) \cap D) + \mu^*((A \cup B)^c \cap D)$$

Letztlich gilt <u>immer</u> die Ungleichung

$$\mu^*(D) \leq \mu^*((A \cup B) \cap D) + \mu^*((A \cup B)^c \cap D)$$

wegen der Subadditivität von μ^*.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{A}(\mu^*)$ ist eine Algebra.

<u>Schritt 2</u>: $\mathcal{A}(\mu^*)$ ist eine σ-Algebra, d.h.

(i) $\mathcal{A}(\mu^*)$ ist eine Algebra ✓

(ii) Für $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}(\mu^*)$ ist

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}(\mu^*).$$

$\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe.

<u>Schritt 3</u>: $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$ ist ein vollständiges Maß, d.h.

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $A_k \cap A_l = \emptyset$ falls $k \neq l$, dann gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

(iii) ist N eine μ-Nullmenge, also $\mu(N) = 0$, gilt:

$$A \subset N \Longrightarrow A \in \mathcal{A}(\mu^*).$$

$\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe.