Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 6

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 30.11.2018, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 6.1 *Lebesgue- vs. uneigentliches Riemann-Integral*
Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ein Maßraum. Zeigen Sie: Ist $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig, dann gilt die Gleichheit $\int_{[0,\infty)} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = \sin(x)/x$ auf $[1, \infty)$ zwar uneigentlich Riemann-integrierbar aber *nicht* Lebesgue-integrierbar ist. *Hinweis*: Verwenden Sie für den ersten Teil den Kommentar in Aufgabe 5.3 ohne Beweis.

Aufgabe 6.2 *Essentielles Supremum als Limes*
Es sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum. Beweisen Sie:

(a) Für $p \in [1, \infty)$ und $\mu(X) < \infty$ ist $L^\infty(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$, für alle $f \in L^\infty(X, \mu)$ gilt
$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$
und die Aussage gilt *nicht* für $\mu(X) = \infty$. *Hinweis*: Verwenden Sie unter anderem die Chebyshev-Ungleichung.

(b) Es gilt
$$\bigcap_{p \in [1,\infty)} L^p(X, \mu) \neq L^\infty(X, \mu).$$
Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel die Funktion $\ln(|x|)$.

Aufgabe 6.3 *Inklusionen von L^p-Räumen*
Für einen Maßraum $(X, \mathcal{E}, \mu)$ betrachten wir die zugehörigen Räume $L^p := L^p(X, \mu)$ mit $1 \leq p < q \leq \infty$. Beweisen Sie:

(a) Es gilt $L^q \subset L^p$ falls $\mu(X) < \infty$.

(b) Es gilt $L^p \subset L^q$ falls X keine Mengen mit beliebig kleinem, aber nicht verschwindendem Maß enthält. *Hinweis*: Zeigen Sie die Aussage zunächst für einfache Funktionen.

(c) Für $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ gilt $L^p \not\subset L^q$ für $1 \leq p \neq q \leq \infty$. *Hinweis*: Untersuchen Sie die Funktionen $x^{-\alpha}$ für $\alpha > 0$ zunächst auf $(0, 1)$ und dann auf $(1, \infty)$.

Aufgabe 6.4 *Konvexität und Hölder-Ungleichung*
Es sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ, d.h. $\mu(X) = 1$.

(a) Beweisen Sie: Ist $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar dann gilt für jede konvexe Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ungleichung
$$\varphi\left(\int_X f \, \mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f \, \mathrm{d}\mu.$$
Hinweis: Beweisen und verwenden Sie, dass sich jede solche konvexe Funktion als Supremum von geeigneten Funktionen der Form $h(y) = ay + b$, $a, b, y \in \mathbb{R}$, schreiben lässt: $\varphi(y) = \sup_h h(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

(b) Benutzen Sie (a), um die Hölder-Ungleichung für nichtnegative Funktionen f, g und $p, q \in (1, \infty)$ zu beweisen. *Hinweis*: Betrachten Sie das Maß $g^q / (\int g^q \, \mathrm{d}\mu) \cdot \mu$.