Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 5

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 23.11.2018, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 5.1 *"Fast überall"*

Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$, eine fest gewählte affine Isometrie T (d.h. $Tx := Ax + b$ für feste $A \in \mathrm{O}(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar und derart, dass $f(Tx) = f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt (also fast überall). Zeigen Sie, dass dann eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert, die fast überall mit f übereinstimmt und für die $g(Tx) = g(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 5.2 *Fallende Funktionenfolgen*

(a) Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Zeigen Sie, dass $\left(f_n := \chi_{[n,+\infty)}\right)_n$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer messbarer Funktionen ist, die gegen $f = 0$ konvergiert, aber

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\lambda.$$

Ohne weitere Voraussetzung gilt also kein Analogon des Satzes von der monotonen Konvergenz für monoton fallende Folgen von messbaren Funktionen.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, das aufzeigt, dass gleichmäßige Konvergenz als Voraussetzung nicht ausreicht. Zeigen Sie, dass die Forderung $\int_{\mathbb{R}} h_1 \, \mathrm{d}\lambda < \infty$ als Voraussetzung ausreicht, wobei h_1 das erste Folgenglied einer entsprechenden Funktionenfolge $(h_n)_n$ bezeichnet. *Hinweis*: Modifizieren Sie die Folge aus (a) für den ersten Teil. Betrachten Sie für den zweiten Teil die Funktionenfolge $(g_n := h_1 - h_n)_n$.

Aufgabe 5.3 *Dominierte Konvergenz*

(a) Das Lebesgue-Integral ist eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals in dem Sinne, dass beide Begriffe auf der Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen übereinstimmen[1]. Für den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ gilt dann $\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f \, \mathrm{d}x$.

Berechnen Sie das Integral

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]} \frac{n \sin(x/n)}{x(x^2+1)} \, \mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n \sin(x/n)}{x(x^2+1)} \, \mathrm{d}x$$

(b) Erklären Sie anhand der Folge $(f_n := 1/n \cdot \chi_{[0,n]})_n$, dass die Voraussetzung $|f_n| \leq g$ für alle n, für eine integrierbare Funktion g, im Satz von der dominierten Konvergenz nicht fallengelassen werden darf.

Aufgabe 5.4 *Noch ein Grenzwert*

Es sei $f : X \to [0, \infty]$ eine integrierbare Funktion auf einem Maßraum $(X, \mathcal{E}, \mu)$ und $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = C$, wobei $0 < C < \infty$. Berechnen Sie das Integral

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \ln\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right) \mathrm{d}\mu$$

in Abhängigkeit eines reellen Parameters $\alpha \in (0, 1]$. *Hinweis*: Verwenden Sie für $\alpha < 1$ die Regel von de l'Hospital und das Lemma von Fatou.

[1] Details dazu finden Sie z.B. in Kapitel 2.7 von *Introduction to Measure Theory and Integration* von Ambrosio, Da Prato und Menucci.