Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 4

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 16.11.2018, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 4.1 *Satz von Carathéodory*
Wir wollen einen Teil von Satz 2.15 aus der Vorlesung beweisen. Gehen Sie davon aus, dass es sich bei $\mathcal{M}$ um eine Algebra handelt (das wurde z.B. in der Plenarübung gezeigt). Beweisen Sie, dass $\mathcal{M}$ sogar eine σ-Algebra ist und das μ ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}$ definiert. *Hinweis*: Starten Sie für eine Kollektion $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ disjunkter Teilmengen von X mit der Gleichung

$$\mu^*\left((A_0 \cup A_1) \cap D\right) = \mu^*\left(((A_0 \cup A_1) \cap D) \cap A_0\right) + \mu^*\left(((A_0 \cup A_1) \cap D) \cap A_0^c\right),$$

die aus der μ^*-Messbarkeit von A_0 folgt, verwenden Sie vollständige Induktion und die Tatsache, dass $\mathcal{M}$ eine Algebra ist.

Aufgabe 4.2 *Kompaktifizierung*
Wir definieren eine Abstandsfunktion auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch

$$d(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

und legen fest: $\arctan(\pm\infty) := \pm\pi/2$. Beweisen Sie:

(a) $\left(\overline{\mathbb{R}}, d\right)$ ist ein kompakter metrischer Raum und eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist genau dann offen bezüglich d, wenn sie offen bezüglich der Frechet-Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ aus der Vorlesung ist. *Hinweis*: Zeigen Sie zunächst entsprechende Aussagen jeweils für die Standardmetrik d_{std} auf $\mathbb{R}$. Beide Abstandsfunktionen sind von der Form $d(x,y) = d_{\text{std}}(\varphi(x), \varphi(y))$, wobei φ eine Umkehrfunktion besitzt. Erinnern Sie sich an die Definition von Stetigkeit.

(b) Folgern Sie, dass für einen messbaren Raum $(X, \mathcal{E})$ eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann messbar bezüglich der von d erzeugten Borel-Algebra ist, wenn sie messbar bezüglich der von der Frechet-Metrik erzeugten Borel-Algebra ist.

Aufgabe 4.3 *Betrag messbarer Funktionen*
Es sei $(X, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum. Beweisen Sie:

(a) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, dann ist auch $|f| : X \to \mathbb{R}$ messbar.

(b) Die Umkehrung von (a) gilt im Allgemeinen *nicht*.

Aufgabe 4.4 *Abzählbare und überabzählbare Nullmengen*

(a) Beweisen Sie: Ist $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar, dann ist A eine Lebesgue-Nullmenge.

(b) Zeigen Sie, dass für eine geeignete Folge $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ die Menge

$$U_k := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(q_n - 2^{-(n+k)}, q_n + 2^{-(n+k)}\right)$$

dicht und offen in $\mathbb{R}$ ist. Folgern Sie die Existenz einer überabzählbaren Lebesgue-Nullmenge. *Hinweis*: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass der Schnitt abzählbar vieler offener, dichter Mengen in diesem Fall wieder dicht ist (Satz von Baire).