Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 3

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 09.11.2018, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 3.1 *σ-Algebra endlicher Mengen*
Wir betrachten eine Familie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer Menge X, definiert durch

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, und genau dann eine σ-Algebra ist, wenn X endlich ist.

Aufgabe 3.2 *Pullback und Pushforward*
Es seien X, Y nicht-leere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie:

(a) Für eine σ-Algebra $\mathcal{Y}$ auf Y ist

$$f^*(\mathcal{Y}) := \left\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{Y}\right\}$$

eine σ-Algebra auf X.

(b) Für eine σ-Algebra $\mathcal{X}$ auf X ist

$$f_*(\mathcal{X}) := \left\{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{X}\right\}$$

eine σ-Algebra auf Y.

Aufgabe 3.3 *Wahrscheinlichkeit*
Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $\mathcal{A}$ mit $\mu_n(X) = 1$ für alle n. Beweisen Sie, dass die Funktion $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, gegeben durch

$$\nu(U) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu_n(U), \quad U \in \mathcal{A}$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert und $\nu(X) = 1$ gilt.

Aufgabe 3.4 *Vollständigkeit*
Für eine Teilmenge $A \subset X$ einer Menge X betrachten wir die von $\{A\}$ erzeugte σ-Algebra

$$\sigma(\{A\}) = \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \mid A \in \mathcal{A},\, \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra auf } X\}$$

und definieren eine Funktion $\mu : \sigma(\{A\}) \to [0, \infty]$ durch

$$\mu(B) := \begin{cases} 0 & \text{falls } B = \emptyset \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie: $(X, \sigma(\{A\}), \mu)$ ist ein vollständiger Maßraum.