Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 2

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 02.11.2018, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 2.1 *Zusammenhang vs. Bogenweiser Zusammenhang*
Sei X ein beliebiger metrischer Raum. Beweisen Sie:

(a) Ist X bogenweise zusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend.

(b) Wir betrachten die Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^2$

$$T := \{(0,0)\} \cup \{(t, \sin(1/t) \,|\, t \in (0, 1/\pi]\}$$

und fassen sie als metrischen Raum auf, indem wir sie mit der Einschränkung der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^2$ ausstatten. Beweisen Sie, dass T zwar zusammenhängend, aber *nicht* bogenweise zusammenhängend ist. *Hinweis*: Um zu sehen, dass es keine stetige Funktion $\gamma : [0, 1/\pi] \to T$ mit $\gamma(0) = (0,0)$ und $\gamma(1/\pi) = (1/\pi, 0)$ geben kann, zeigen Sie zunächst, dass eine solche Funktion jeden Punkt von T in ihrem Bild enthält und zeigen Sie dann, dass sie nicht stetig bei 0 sein kann.

Aufgabe 2.2 *Potentiale*

(a) Berechnen Sie die Rotation und folgern Sie die Existenz eines Potentials für das Vektorfeld

$$f(x, y) = (y \cos(x) + y^2, \sin(x) + 2xy - 2y).$$

Bestimmen Sie das Potential dann explizit.

(b) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass das Vektorfeld

$$g(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ kein *globales* Potential besitzt. Konstruieren Sie eine Überdeckung $\{U_i\}_i$ von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit offenen Mengen U_i, sodass zumindest *lokale* Potentiale für die Einschränkungen $g|_{U_i}$ existieren. Woran scheitert eine globale Konstruktion?

Aufgabe 2.3 *Verschlingung*
Es sei $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \,|\, x = y = 0\}$ der dreidimensionale euklidische Raum ohne die z-Achse. Beweisen Sie: Die geschlossenen Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to U$, definiert durch

$$\gamma_1(t) = (3\cos(t), 3\sin(t), 0) \qquad \gamma_2(t) = (0, 3 + \cos(t), \sin(t))\,,$$

sind nicht homotop. *Hinweis*: Skizzieren Sie die Situation und berechnen Sie geeignete Kurvenintegrale.

Aufgabe 2.4 *Punktierte Räume*
Beweisen Sie zunächst folgende Aussagen.

(i) Eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist homotop zu einem geschlossenen Polygonzug in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) Für $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+ a$ einfach zusammenhängend.

Folgern Sie, durch geeignete Wahl von a, den einfachen Zusammenhang von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ für $n > 2$.