Plenarübung 1

25. 10. 2018

Themen:
* "Raumfüllende" Kurven
* Topologische Grundbegriffe und Dimension
* Fraktale und Hausdorff-Dimension.

Raumfüllende Kurven:

Cantor 1878: Es gibt eine mengentheoretische Bijektion

$$I = [0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1] \times [0,1] = I^2$$

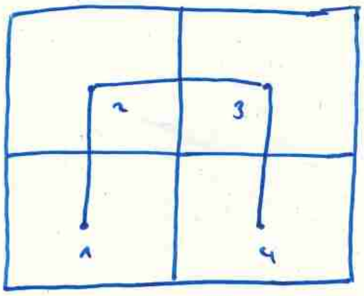
→ Frage: Kann so eine Abbildung stetig sein?

Ja: Erstes Beispiel 1890 von Peano, gefolgt von Hilbert, Lebesgue, ...

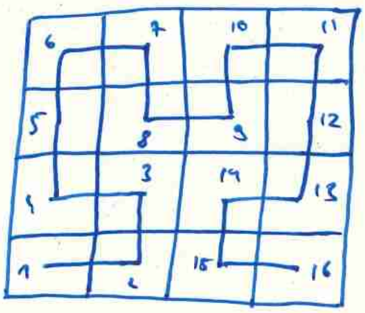
Hilbert's Konstruktion:

Die Kurve entsteht iterativ durch Subdivision eines Quadrates in kleinere Quadrate und Verbindung der Mittelpunkte gemäß eines bestimmten Nummerierungsschemas.
Startet man mit dem Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$, erhält man eine Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,1]^2$, durch Verbindung der Mittelpunkte von 4^n Quadraten mit Seitenlänge 2^{-2n}.

Nummerierungsschema:



$n = 1.$



$n = 2.$

. . .

Wir benennen die einzelnen Geradenstücke durch Intervalle,

$I_k = \cancel{[(k-1), k)}\ [\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n})$

Aussage: Die Funktion $\lim_{n \to \infty} f_n =: f : [0,1] \to [0,1]^2$ ist stetig und surjektiv (und existiert ...).

Beweisidee:

Schritt 1: Wir zeigen, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, damit existiert $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ und f ist stetig, da f_n stetig $\forall n$. (per Konstruktion)

Schritt 2: Wir zeigen, dass jeder Punkt $(x,y) \in [0,1]^2$ im Abschluss des Graphen von f liegt, damit ist $f([0,1]) = [0,1]^2$, da $f([0,1])$ abgeschlossen ist.

Zu Schritt 1: Für ~~jeden~~ geg. Punkte $x, y \in \cancel{[0,1]}\ I_k$ liegen die Bilder $f_n(x)$ und $f_{n+1}(y)$ im selben Quadrat der Seitenlänge 2^{-2n}.

$$\Rightarrow \| f_{n+1} - f_n \|_\infty \leq 2^{-2n}.$$

Genauso ist für $m > n$

$$\| f_m - f_n \|_\infty \leq 2^{-2n} \text{ bel. klein für } n \to \infty.$$

Als Cauchy-Folge in einem Banachraum konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f.

Zu Schritt 2: Wir fixieren $(x,y) \in [0,1]^2$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann liegt (x,y) in einem der Quadrate, sagen wir im k-ten.

$$\Rightarrow \| f_n\left(\tfrac{k}{4^n}\right) - (x,y) \| \leq 2^{-2n}.$$

Außerdem ist $f = f_n + \sum_{m=n}^{\infty} (f_{m+1} - f_m)$.

$$\Rightarrow \| f\left(\tfrac{k}{4^n}\right) - (x,y) \|$$

$$\leq \| f_n\left(\tfrac{k}{4^n}\right) - (x,y) \| + \sum_{m=n}^{\infty} \| f_{m+1} - f_m \|$$

$$\leq 2^{-2n} + \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-2m}$$

Verwende geometrische Reihe!

$$= 2^{-2n} + 2^{-(2n-1)} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \cdot 2^{-2n} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

$\Rightarrow$ (x,y) liegt im Abschluss des Graphen von f.

Bemerkung: Natürlich gibt es auch stetige Injektionen $[0,1] \hookrightarrow [0,1]^2$. Es kann aber <u>keinen Homöomorphismus</u> (also eine stetige Bijektion, deren Umkehrabb. auch stetig ist) geben. Grund ist die "topologische Invarianz der Dimension" bewiesen von Brouwer um 1910:

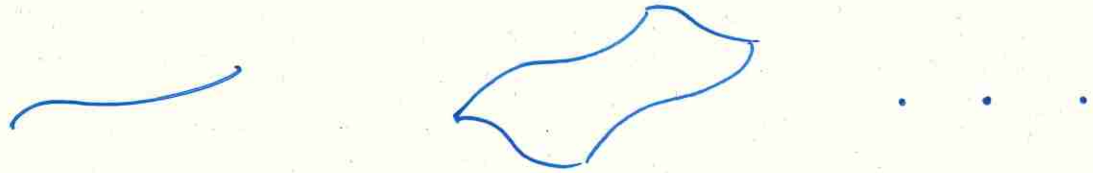
Theorem. Für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sind $\mathbb{R}^{n_1}$ und $\mathbb{R}^{n_2}$ aufgefasst als metrische Räume genau dann homöomorph, falls $n_1 = n_2$.

* Damals war das ein wichtiges offenes Problem, sein Beweis sehr schwer.
* Heutzutage viel leichter (algebraische Topologie).

Bemerkung: Es stellt sich heraus, dass es eine große Klasse von Räumen gibt, sog. <u>Peano-Räume</u>, die sich als stetige Bilder von $[0,1]$ schreiben lassen:

Theorem (Hahn-Mazurkiewicz).
Ein Hausdorffraum (z.B. ein metrischer Raum) X ist genau dann das Bild einer stet. Abb. $f: [0,1] \to X = f([0,1])$, wenn es kompakt, zusammenhängend, lokal zus. und metrisch ist.

Unser üblicher Dimensionsbegriff beruht auf einem lokalen Vergleich mit $\mathbb{R}^n$:



$d = 1$. $\quad$ $d = 2$.

Hierbei handelt es sich um die Dimension als topologische <u>Mannigfaltigkeit</u> (mehr dazu später).

<u>Frage</u>: Gibt es einen Dimensionsbegriff der besser an "raumfüllendes" Verhalten angepasst ist, und damit auch an Skalierungseigenschaften von z.B. physikalischen Größen?

Hausdorff-Maß und -Dimension

Der <u>Durchmesser</u> einer Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist geg. durch

$$\operatorname{diam}(U) := \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in U\}.$$

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine abzählbare Kollektion von Teilmengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$, sodass gilt

$$\operatorname{diam}(U) \leq \delta\,; \quad \delta \in \mathbb{R}_+$$

und $$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\,.$$

Dann heißt $\{U_i\}_{i \in I}$ <u>δ - Überdeckung von A.</u>

<u>Definition.</u>

Für $s \geq 0$ sei

$$H^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^s \;\middle|\; \begin{array}{l} \{U_i\}_{i \in I} \text{ ist} \\ \text{eine } \delta\text{-Überdeckung} \\ \text{von } A. \end{array} \right\}$$

Verkleinert man δ, sinkt die Anzahl möglicher δ - Überdeckungen und $H^s_\delta(A)$ wächst.

Wir nennen

$$H^s(A) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(A)$$

<u>s - dimensionales Hausdorff-Maß von A.</u>

<u>Bemerkungen.</u>

* Der "Grenzwert" könnte $+\infty$ sein.
* Bei $H^s(A)$ handelt es sich um ein (äußeres) Maß im Sinne der Maßtheorie, also einer Verallgemeinerung von Längen, Flächen und Volumina. Es ist eng verwandt mit dem Lebesgue Maß.
  $\rightsquigarrow$ mehr dazu später (viel mehr).
* $\delta \to 0$ zwingt die Überdeckung der "lokalen Geometrie" von A zu folgen.

Beispiele: H^0 : Anzahl von Punkten

H^1 : Länge von Kurven

H^2 : Inhalt von Flächen

$\vdots$

Interessante Eigenschaft:

Sei $t > s$. Dann gilt

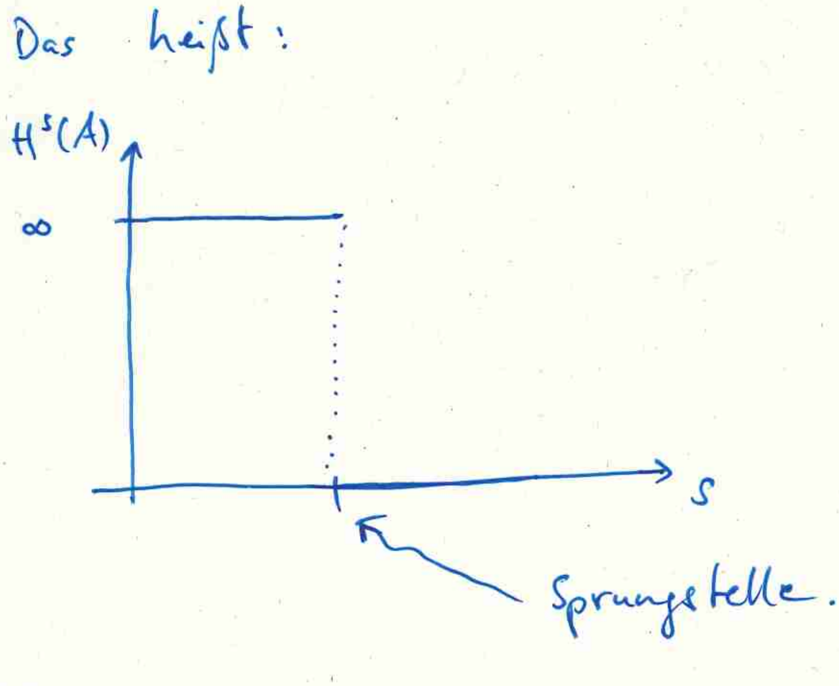
$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^t \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^{t-s} \cdot \operatorname{diam}(U_i)^s$$

$$\leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^s .$$

$$\Rightarrow H^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s} H^s_\delta(A).$$

$$\delta \to 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Falls } H^s(A) < \infty \Rightarrow H^t(A) = 0, \; t > s. \\ \text{Falls } H^t(A) > 0 \Rightarrow H^s(A) = 0, \; t > s. \end{cases}$$

Das heißt:



Definition. Der Wert

$$\dim_H A := \inf \{ s \geq 0 \mid H^s(A) = 0 \}$$
$$= \sup \{ s \geq 0 \mid H^s(A) = \infty \}$$

heißt Hausdorff-Dimension von $A \subset \mathbb{R}^n$.

Beispiel: $D^2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^3$

Dann ist

$$H^1(D^2) = \infty$$
$$H^2(D^2) = \text{Konstante} \cdot \overbrace{\text{Fläche}(D^2)}^{=1} < \infty$$
$$H^3(D^3) = 0$$

$$\Longrightarrow \dim_H (D^2) = 2.$$

Beispiel: $A \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow \dim_H A = n$.

Interessantere Beispiele, bei denen $\dim_H$ einfach zu berechnen ist und sich häufig von der üblichen topologischen Dimension unterscheidet, liefern "selbstähnliche" Fraktale:

Iterierte Funktionensysteme

Definition. X, Y metrische Räume.

$f : X \to Y$ heißt *Ähnlichkeit*, falls ein $r > 0$ existiert, sodass

$$d(f(x), f(y)) = r\, d(x,y) \quad \forall x, y \in X.$$

Ein *iteriertes Funktionssystem* bzgl. $(r_1, \dots, r_m)$, von X ist eine Liste $(f_1, \dots, f_m)$, wobei

$$f_i : X \to X$$

Ähnlichkeiten bzgl r_i sind.

Beispiele.

① Cantor-Menge

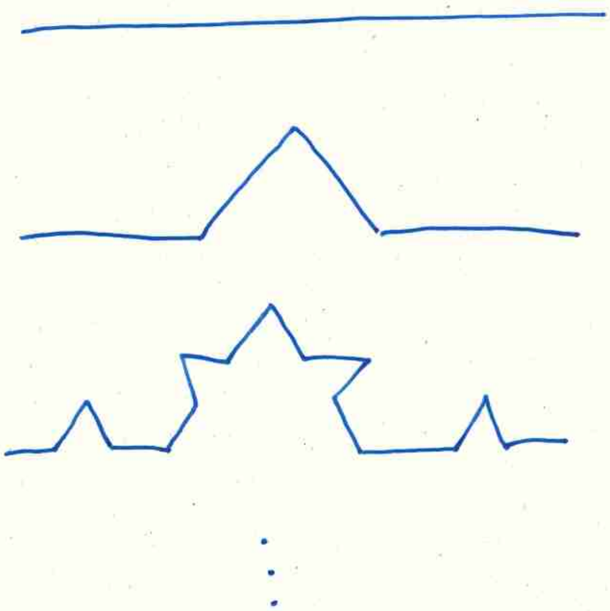
$n = 1 : C_1$
$n = 2 : C_2$
$n = 3 : C_3$
$n = 4 : C_4$

$\vdots$

$$\rightsquigarrow C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Hier ist $m = 2$ und $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$.

② von Koch-Kurve



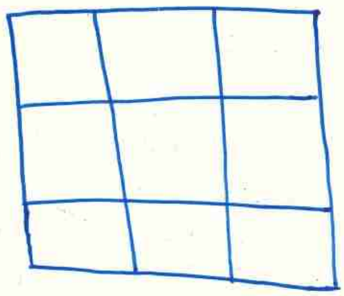
$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

Hier ist $m = 4$ und $\overset{r}{\cancel{m}}_1 = \overset{r}{\cancel{m}}_2 = \overset{r}{\cancel{m}}_3 = \overset{r}{\cancel{m}}_4 = \frac{1}{3}$.

③ Quadrat



$m = 9$

$\overset{r}{\cancel{m}}_1 = \dots = \overset{r}{\cancel{m}}_9 = \frac{1}{3}$

Falls die Bilder der Ähnlichkeiten für ein it. Fkt. Sys. sich nicht "zu sehr" überschneiden, dann gilt für den Limes der Iteration folgende Relation.

Satz. $(f_1, \dots, f_n)$ ein it. Fkt. Sys.

Falls eine nicht-leere offene Menge $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ existiert, sodass

$$\bigcup_{i=1}^{n} f_i(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O} \quad \text{und} \quad f_i(\mathcal{O}) \cap f_j(\mathcal{O}) = \emptyset, \quad \text{für } i \neq j,$$

dann gilt für den Limes A der Iteration

$$\dim_H (A) = D,$$

wobei D bestimmt ist durch die Gleichung

$$r_1^D + \dots + r_n^D = 1.$$

Def. Ein metrischer Raum X heißt <u>Fraktal</u>, falls

$$\dim_H (X) > \dim_T (X),$$

wobei $\dim_T$ die topologische Dimension (z.B. als Mannigfaltigkeit) bezeichnet.

Beispiele.

① Cantor-Menge. $\dim_T = 0$, $\dim_H = \dfrac{\log(2)}{\log(3)} = 0.63\ldots > 0$.

② von Koch-Kurve $\dim_T = 1$, $\dim_H = \dfrac{\log(4)}{\log(3)} = 1.26\ldots > 1$.

③ Quadrat $\dim_T = 2$, $\dim_H = \dfrac{\log(9)}{\log(3)} = 2 = 2$.

④ Peano-Kurve $\dim_T = 1$, $\dim_H = 2$.