Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 1

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Abgabetermin: 26.10.2018, 10:00 Uhr email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 1.1 *Riemann-Integral - Anwendung 1*
Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ der Folge (Hinweis: Schreiben Sie $a_n = \exp S_n$.)

$$a_n := \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n+k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Aufgabe 1.2 *Riemann-Integral - Anwendung 2*
Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Berechnen Sie I_0, I_1 und zeigen Sie für $n \geq 2$ die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

(b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots.$$

Aufgabe 1.3 *Bogenlänge und Einheitsgeschwindigkeit*
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Eine $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : [a,b) \to U \subset \mathbb{R}^n$ mit nicht kompaktem Parameterintervall ist genau dann rektifizierbar, wenn das uneigentliche Integral $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$ existiert.

(ii) Für jede reguläre $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : I \to U \subset \mathbb{R}^n$ existiert eine orientierungserhaltende $\mathcal{C}^1$-Parametertransformation $\varphi : I \to J$, sodass $\|\beta'(t)\| = 1$ für alle $t \in J$, wobei $\beta := \gamma \circ \varphi^{-1} : J \to U$ die neu parametrisierte Kurve bezeichnet. Man nennt β dann *nach Bogenlänge parametrisiert.*

Überprüfen Sie die Kurve $\gamma : [a,\infty) \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$t \longmapsto e^{\lambda t}(\cos(t), \sin(t)), \quad a \in \mathbb{R},\ \lambda < 0,$$

auf Rektifizierbarkeit und geben Sie wenn möglich eine Parametrisierung nach Bogenlänge an.

Aufgabe 1.4 *Diskrete Räume*
Wir betrachten einen metrischen Raum (D, d_{dis}) mit der diskreten Metrik

$$d_{\text{dis}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases} \quad \text{für } x, y \in D.$$

(a) Klassifizieren Sie alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen von (D, d_{dis}) und beweisen oder widerlegen Sie den Zusammenhang von (D, d_{dis}).

(b) Sei X ein metrischer Raum und $\#D \geq 2$. Beweisen Sie, dass X zusammenhängend ist, genau dann wenn jede stetige Abbildung $f : X \to (D, d_{\text{dis}})$ konstant ist.