Höhere Mathematik für's Studium der Physik 3
Aufgabenblatt 0

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Hans Knüpfer, Lukas Hahn

Präsenzübung email: lhahn@mathi.uni-heidelberg.de

Aufgabe 0.1. *Ein Funktionenraum*
Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Hölder-stetig mit Exponent* $\alpha \in (0,1]$, falls eine Konstante $C \geq 0$ existiert, mit der für alle $x_1, x_2 \in U$ gilt:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C \, \|x_1 - x_2\|^{\alpha} .$$

Wir betrachten die Menge der Hölder-stetigen Funktionen

$$C^{0,\alpha}([a,b]) := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ ist Hölder-stetig mit Exponent } \alpha \right\}$$

und statten sie mit einer Abbildung $\|\cdot\|_H : C^{0,\alpha}([a,b]) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ aus, wobei

$$\|f\|_H := \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x,y\in[a,b],\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x-y\|^{\alpha}}.$$

Beweisen Sie: $C^{0,\alpha}([a,b])$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, auf dem $\|\cdot\|_H$ eine Norm definiert und $(C^{0,\alpha}([a,b]), \|\cdot\|_H)$ ist vollständig.

Aufgabe 0.2. *Gewöhnliche Anfangswertprobleme*
Untersuchen Sie die Anfangswertprobleme

$$\text{(a)} \quad g'(t) = g(t)^{\frac{1}{4}}, \quad t \geq 0 \qquad \text{(b)} \quad g'(t) = -\sin(t) g(t)^2, \quad t \geq 0$$

hinsichtlich Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, sowie deren Existenzintervall, jeweils für die Anfangswerte $g(0) = 1$ und $g(0) = 0$.

Aufgabe 0.3. *Uneigentliche Integrale?*
Überprüfen Sie, ob die Ausdrücke

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\infty} \sin(x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2) \, \mathrm{d}x$$

als uneigentliche Riemann-Integrale existieren.

Aufgabe 0.4. *Grenzen des Riemann-Integrals*
Ermitteln Sie die Unstetigkeitsstellen der folgenden Funktionen $f, g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ und beweisen oder widerlegen Sie ihre (eigentliche) Riemann-Integrierbarkeit.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{falls } x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x > 0,\ x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit } \mathrm{ggT}(p,q) = 1 \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$